

Meetkunde en Fysica

Henk Broer

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen

Overzicht

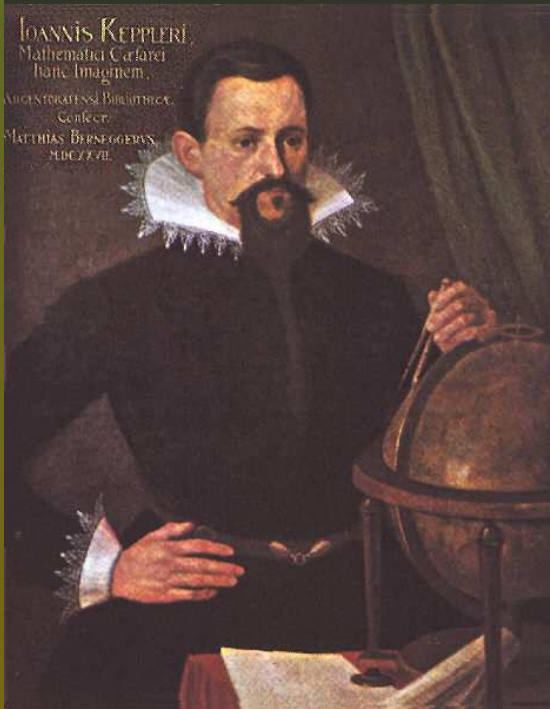
Meetkundige aspecten van natuurkunde:

- Newton en schalingswetten van de ruimte
- Kromming in dimensie twee en drie
- IDEE: lichtstralen zijn geodeten
- Beltrami-Klein meetkunde van het HEDEN in Minkowski-ruimte

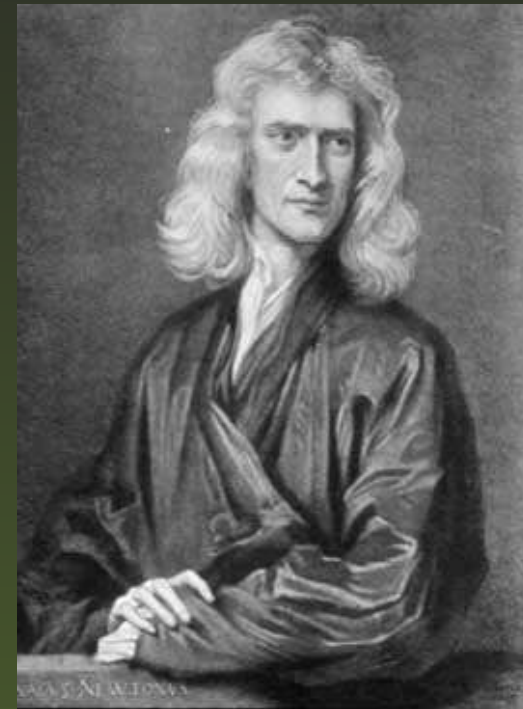
Email: broer@math.rug.nl

URL: <http://www.math.rug.nl/~broer>

Kepler & Newton



Johannes Kepler
(1571-1630)



Isaac Newton
(1642-1727)

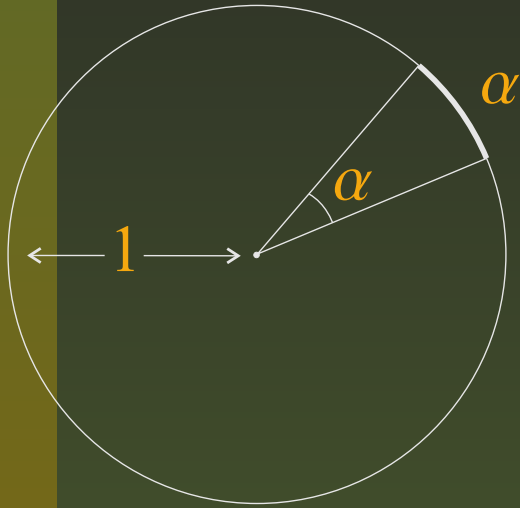
Cirkel & bol (1)

Uitgangspunt: NATUURKUNDE is gebonden aan de MEETKUNDE van vlak en ruimte

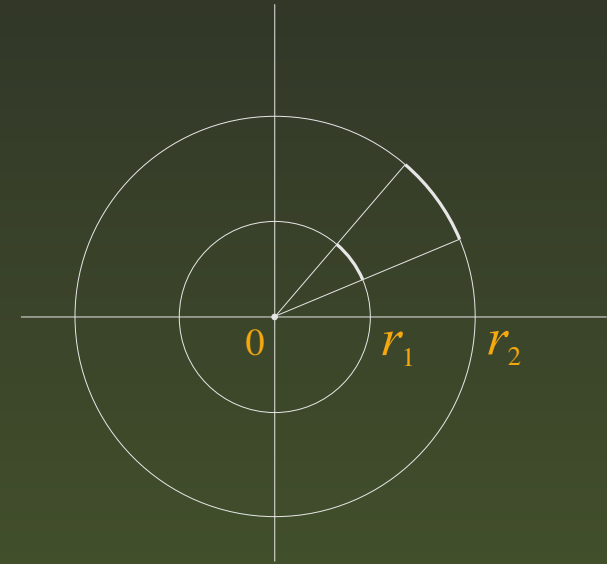
SCHALINGSWETTEN cirkel en bol:

- OMTREK vlakke cirkel straal $2\pi r$
Hoek (in radialen) = lengte langs eenheidscirkel
- OPPERVLAKTE bol $4\pi r^2$
Ruimtehoek = oppervlakte op eenheidsbol

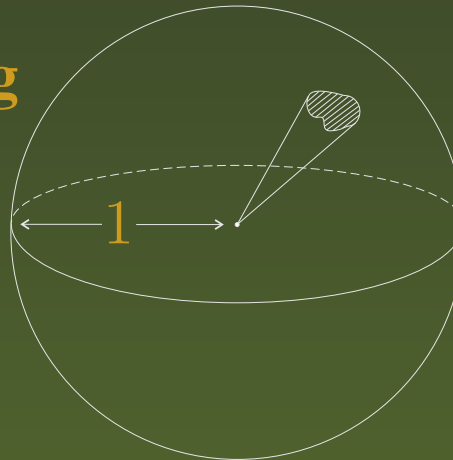
Hoek & ruimtehoek



Hoek = lengte boog



Lengte $\sim r$



Ruimtehoek

Flux krachtveld: plat en ruimtelijk

VLAK zwaartekrachtveld: $F = -\frac{1}{r}\mathbf{e}_r$

FLUX door cirkelboog met straal r :

HOEK boog, onafhankelijk van r

Michael Faraday, James Clerk Maxwell

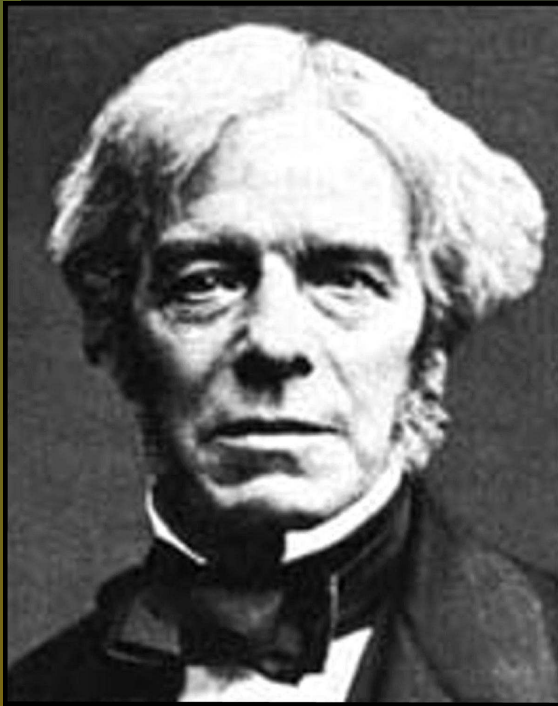
RUIMTELIJK zwaartekrachtveld: $F = -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$

FLUX door oppervlakje op bol met straal r :

RUIMTEHOEK oppervlakje, onafhankelijk van r

Isaac Newton MAN VAN HET MILLENIUM

Faraday & Maxwell



Michael Faraday
(1791-1867)



James Clerk Maxwell
(1831-1897)

Scholium I

Krachtvelden met 'alle' oplossingen periodiek
planeetbeweging periodiek (ellips: Kepler I)

Perihelium-draaiing Mercurius $\Leftarrow \neq \Rightarrow$ Newton
ontdekt in 19e eeuw

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica 1687
(Newton I \sim schaling boloppervlak)

Kepler I, II, III & observaties Flamsteed:
Jupiter + satellieten minizonnestelsel

\rightsquigarrow hypothese UNIVERSELE zwaartekracht
 \Rightarrow planeetbewegingen chaotisch?

Kromming (1): Bol versus vlak

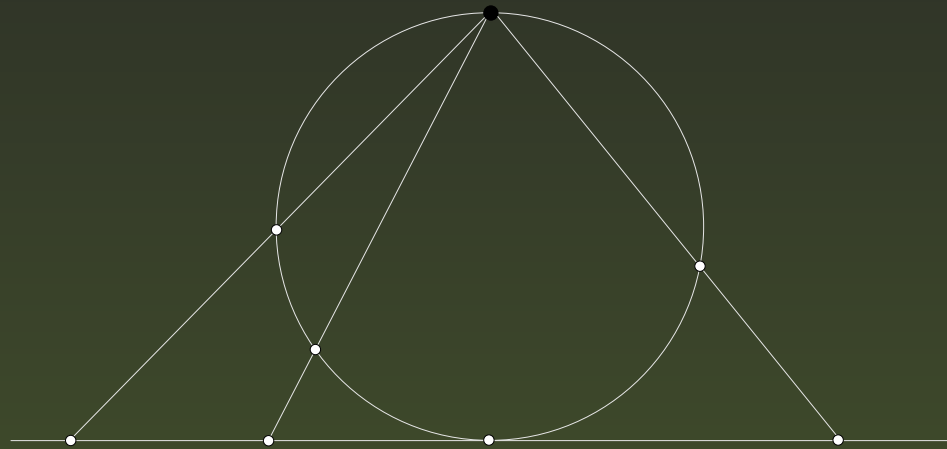
Locaal ziet bol er uit als vlak

Ooit dacht men “de Aarde is plat” (denk ook aan atlas)

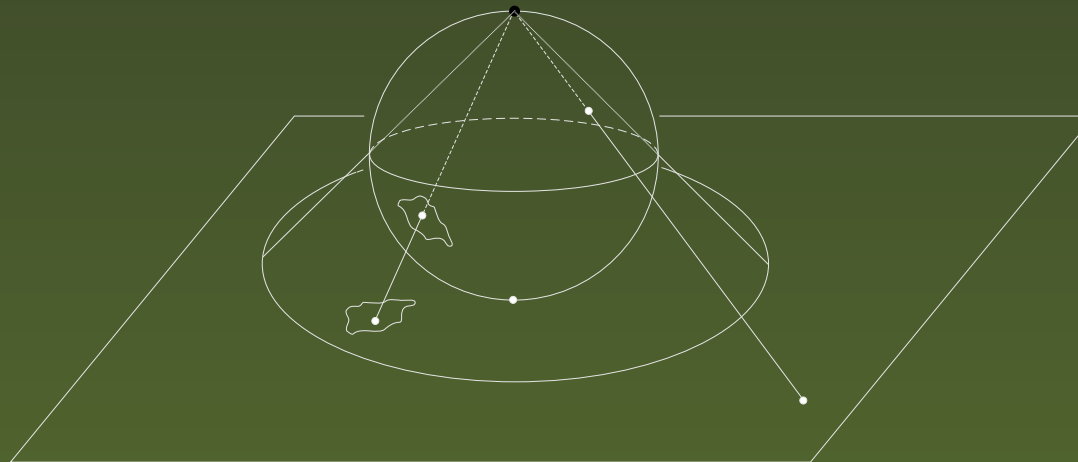
Hoe zit dat?

- Bol zonder punt \cong vlak:
topologie = rubbermeetkunde
Filosofie: “ ∞ is far away”
- Stereografische projectie
hoektrouw
voert cirkels in cirkels over
bewaart geen afstanden ...
“Noordpool” $\sim \infty$
- Vergelijk Mercator kaart-projectie
(veelgebruikt in atlassen)

Stereografische projectie



Cirkel zonder “Noordpool” \cong lijn



Bol zonder “Noordpool” \cong vlak

Kromming (2): Platlanders

Beschouw VLAkke cirkel met straal r

Omtrek:

$$\mathcal{O}(r) = 2\pi r, \text{ dus } \frac{\mathcal{O}(r)}{r} = 2\pi, \quad (1)$$

onafhankelijk van de straal r

Hoe zit dat op de BOL?

Afstand = booglengte langs grote cirkels (= geodeten)

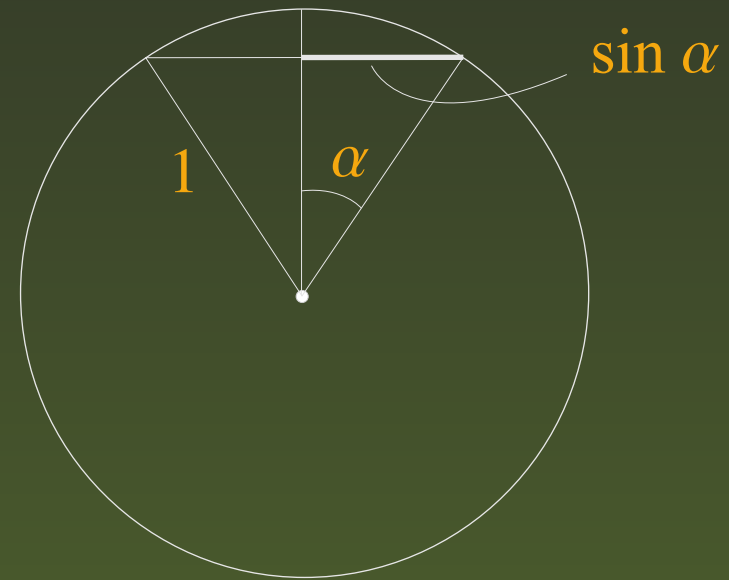
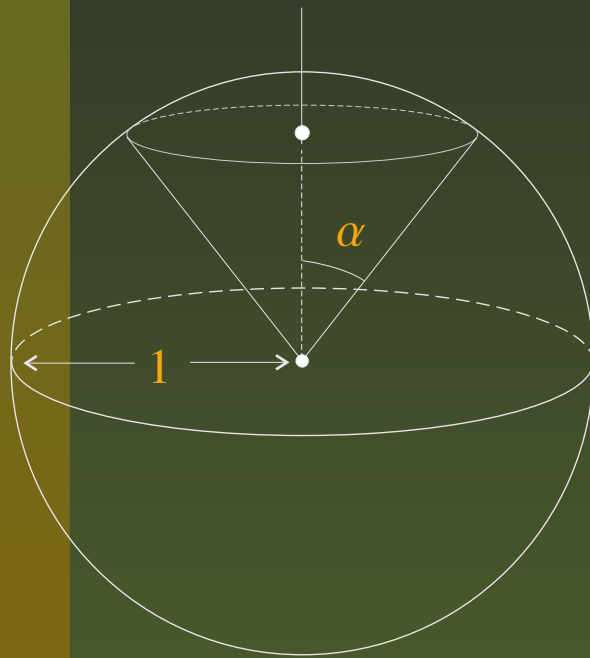
Beschouw cirkel op eenheidsbol met als 'straal' hoek α .

Omtrek:

$$\mathcal{O}(\alpha) = 2\pi \sin \alpha, \text{ m.a.w.}$$

$$\frac{\mathcal{O}(\alpha)}{\alpha} = 2\pi \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2\pi \left(1 - \frac{1}{6}\alpha^2 \right) + O(\alpha^4) \quad (2)$$

Cirkel op bol



Cirkel met 'straal' α ... doorsneden met meridiaanvlak

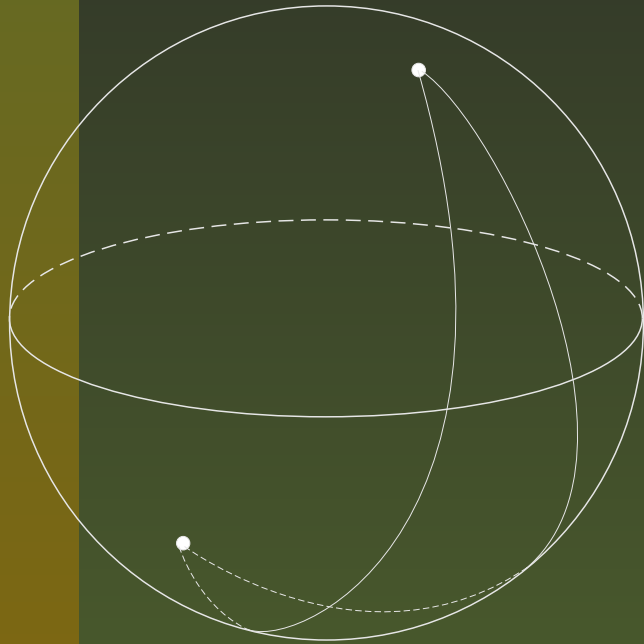
Scholium II

Vergelijk (1) en (2): Merk op dat (1) constant is (d.w.z., niet van r afhangt)

Echter, zelfs voor kleine α is (2) niet constant: dit heet KROMMING \Rightarrow bol niet-Euclidisch (elliptisch)

- Kromming locale eigenschap
- Meetbaar voor PLATLANDER

Elliptische meetkunde & Riemann



Alle geodeten hebben twee snijpunten



Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)

Eigentijd

IDEE: AFSTAND = REISTIJD LICHT (EIGENTIJD)

Lorentz - Minkowski - Einstein

~> Lichtstralen zijn geodeten

Afbuigen fotonen door massa \Leftrightarrow gekromde ruimte

Waarnemingen bij totale Zonsverduistering: sterrenlicht dat vlak langs Zon gaat wordt afgebogen

Lorentz & Minkowski



Hendrik Antoon Lorentz
(1853-1928)



Hermann Minkowski
(1864-1909)

Scholium III

RUIMTE-TIJD

- Minkowski-ruimte voor PLATLANDERS

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y), t\};$$

met krom 'ruimteachtig deel', b.v.:

$$\mathbb{S}^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

- Uitdijend heelal: opgeblazen ballon \Rightarrow alle onderlinge afstanden vergroten

- 3D Minkowski-ruimte $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z), t\}$

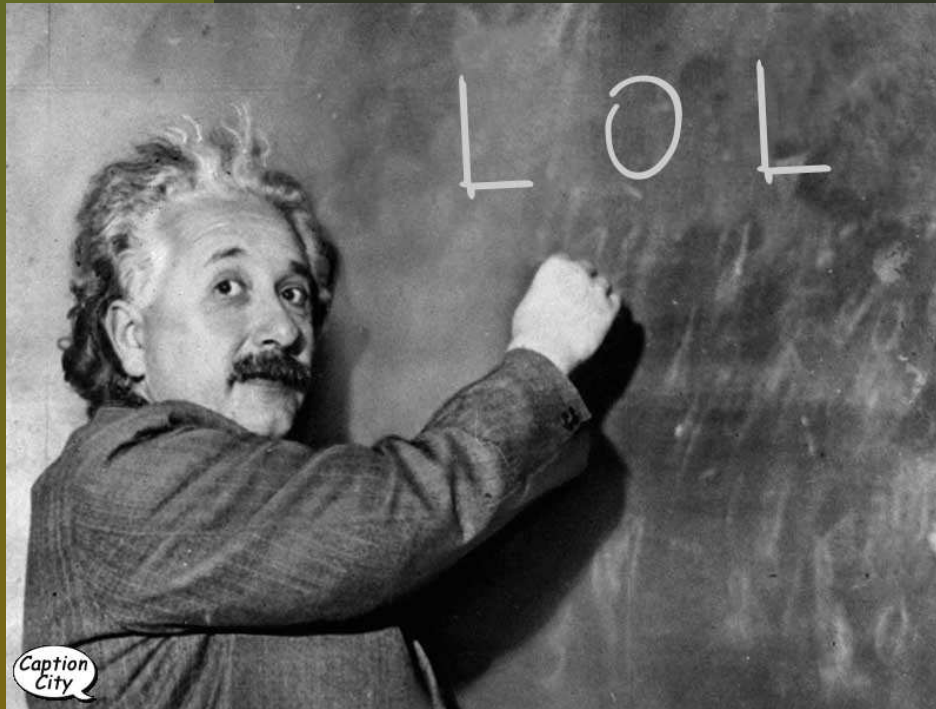
met krom 'ruimte-achtig deel', b.v.:

$$\mathbb{S}^3 = \{(u, v, w, z) \in \mathbb{R}^4 \mid u^2 + v^2 + w^2 + z^2 = 1\}$$

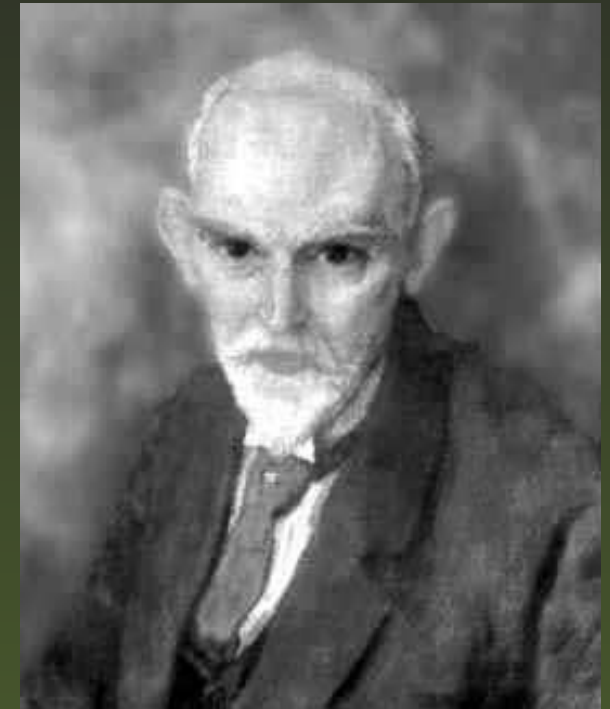
DE SITTER HEELAL (Sneek 1872 - Leiden 1934)

Wat is waarheid?

Einstein & de Sitter



Albert Einstein
(1879-1955)



Willem de Sitter
(1872-1934)

Minkowski-ruimte en lichtkegel

Terug naar Minkowski-ruimte voor PLATLANDERS:

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y), t\}$$

$$\text{'Lichtkegel'} = \{((x, y), t) \mid x^2 + y^2 = c^2 t^2\}$$

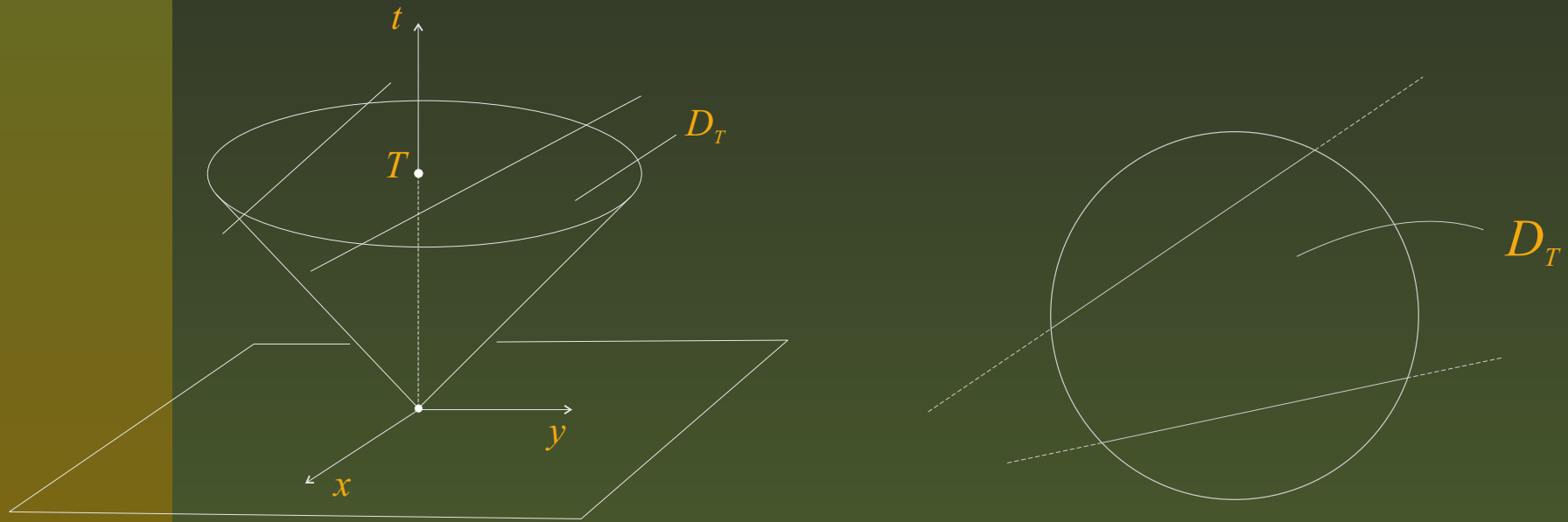
Ruimte-achtige schijf, het “HEDEN”

$$D_T = \{(x, y, T) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq c^2 T^2\}$$

heeft Beltrami-Klein meetkunde

~ meetkunde van Poincaré-model (hyperbolisch)

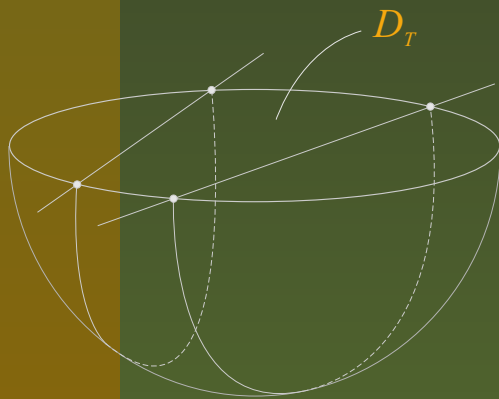
Lichtkegel en Beltrami-Klein



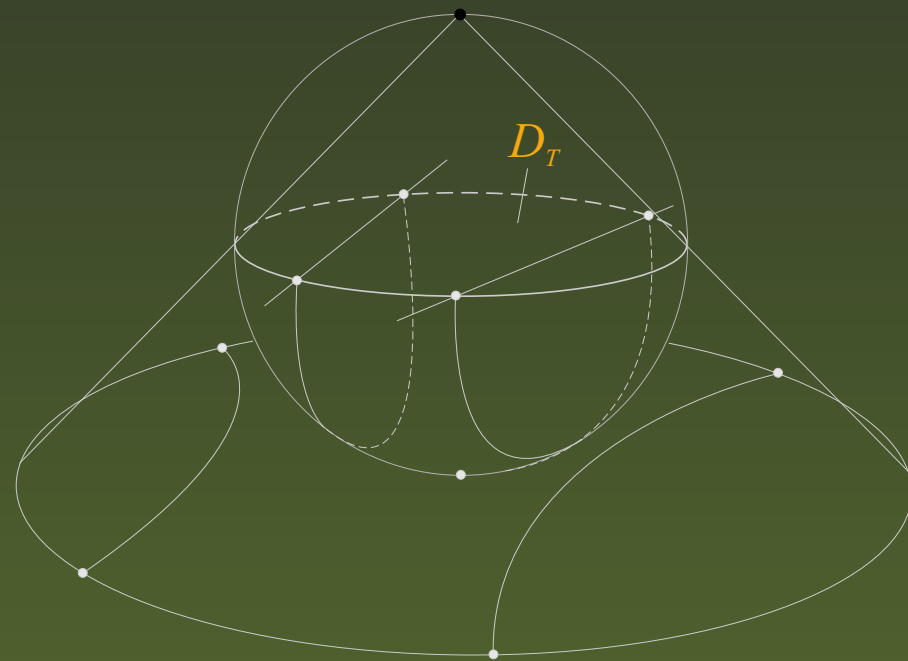
Het “HEDEN” D_T in de lichtkegel heeft Beltrami-Klein meetkunde

Beltrami-Klein en Poincaré model

Beltrami-Klein en Poincaré modellen hyperbolische meetkunde equivalent:

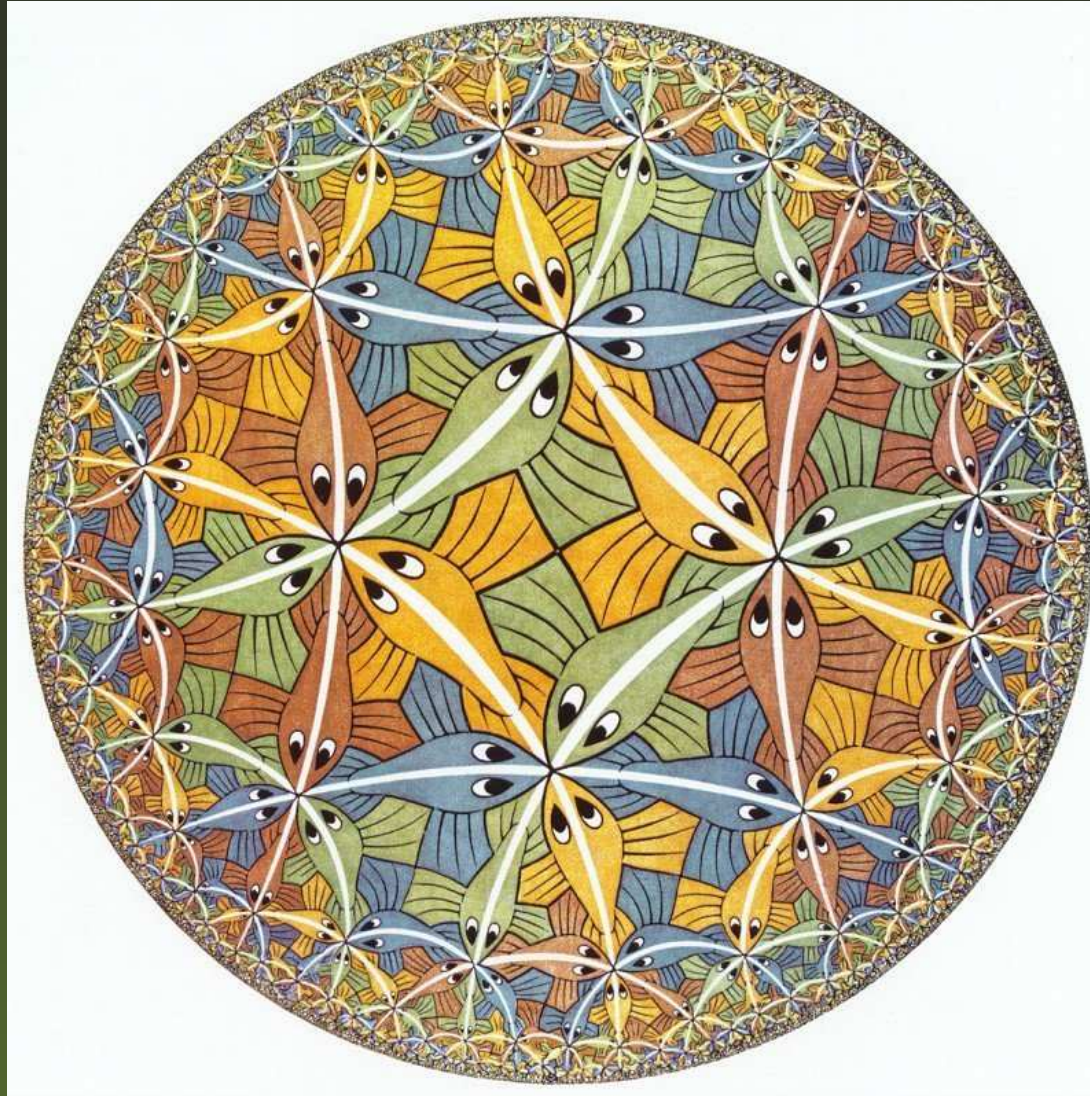


Van B-K naar halve bol . . .



en stereografische projectie

Volgens M.C. Escher (1898-1972)



Circle Limit III