Informatica/Scheikunde Wiskunde 3 Cursus 2001-2002
Tentamenvoorbeeld, duur: 3 uur.

Informatica studenten moeten Opgaven 1 tot en met 6 (4 sp.) maken.
Scheikunde studenten moeten Opgaven 3 tot en met 6 (3 sp.) maken.

Boeken, rekenmachines, enz. zijn niet toegestaan. Alle antwoorden moeten worden gemotiveerd; geef de gevolgde methode en/of de gebruikte formule aan. Wees duidelijk maar vermijd overbodige uitwijdingen.

1.[1] Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' - 15y = \mathrm{e}^{-5x}\sin x.$$

(a)[3] Bepaal de oplossing van de homogene vergelijking.
(b)[4] Bepaal een particuliere oplossing.
(c)[2] Bepaal de oplossing die voldoet aan $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2.[1] (a)[2] Maak via $y_1(x) = y(x)$ en $y_2(x) = y'(x)$ van de tweede orde differentiaalverlijking

$$y'' + y' - 20y = 0$$

een systeem van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen
(b)[5] Los het systeem op.
(c)[2] Bepaal de oplossing die voldoet aan $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

3.[1] De onderdelen van deze opgave kunnen onafhankelijk van elkaar worden gemaakt.
(a)[3] Bepaal een zo groot mogelijk *open interval* (a, b) zó dat voor alle $x \in (a, b)$ de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(2x-7)^n$$

convergent is. (Aanwijzing: Bepaal de convergentiestraal met behulp van het verhoudings- of wortelkenmerk.)
(b)[6] Bepaal een machtreeksoplossing $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ van het beginwaarde probleem

$$(x^2 + 1)y'(x) = 2xy(x), \qquad y(0) = 1.$$

Bereken a_0, a_1, a_2, a_3 en vervolgens a_n voor $n \geq 4$. Toon aan $y(x) = 1 + x^2$.

4.[1](a)[6] Leg uit dat op het open interval $(0, \pi)$ geldt:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$$

Aan de orde moeten komen: berekening van Fouriercoëfficiënten; even en oneven voortzetting, sinus- en cosinusreeksen en de stelling over puntsgewijze convergentie van Fourierreeksen.
(b)[3] Toon aan dat

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Opmerking: Zo geformuleerd is Opgave 4 wat aan de zware kant, maar over deze onderwerpen mag je een vraag verwachten.

5.[1,9] Het oppervlak S bestaat uit twee onderdelen: de halfbol

$$H = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

met parametrisering $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ en de cirkelschijf

$$D = \{(x, y, 0)|x^2 + y^2 = 1\}$$

met parametrisering $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ en G is het volume binnen S. Stel $\mathbf{n}$ is de *naar buiten wijzende* eenheidsnormaal op S en $\mathbf{F}$ is het vectorveld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} y & -x & z \end{bmatrix}.$$

(a)[4] Bereken de oppervlakte-integraal $\int\int_H \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dA$.
(b)[5] Bereken $\int\int\int_G \operatorname{div}\mathbf{F} dV$ en wel op twee manieren: (i) via de stelling van Gauss en (ii) direct. (Aanwijzing bij (ii): Het volume van een bol met straal r is $\frac{2}{3}\pi r^3$.)

Als alternatief voor Opgave 5 kan ook gevraagd worden de oppervlakte van een oppervlak $z = f(x, y)$ te berekenen. Voorbeeld: Bepaal de oppervlakte van de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dat boven het (x, y)-vlak ligt en binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ met straal r.(Aanwijzing: Gebruik de parametrisering: $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)$.
Ook van Examples 1 en 2 in Sectie 9.7 van het boek zijn goede vraagstukken te maken.

6.[1] De onderdelen van deze opgave kunnen onafhankelijk van elkaar worden gemaakt.
(a)[4] Bepaal met behulp van scheiding van variabelen oneindig veel oplossingen $u(x, y)$ van $u_x + u_y = (x + y)u$.
(b)[5] (i) Schets de grafieken van x en e^{-x} in een figuur.
(ii) Bespreek de interaties volgens de dekpuntstelling en volgens de methode van Newton-Raphson voor het numeriek benaderen van de oplossing van de vergelijking $x = \mathrm{e}^{-x}$.
(iii) Construeer grafisch voor beide methoden de benaderingen x_1 en x_2 in de figuur uitgaande van $x_0 = 1$.
(Bij een schets hoeven raaklijnen en dat soort zaken niet precies uitgerekend te worden; het plaatje moet wel redelijk kloppen, en slordige/onduidelijke schetsen worden natuurlijk niet goedgekeurd.)