

Hoofdstuk 2

Dynkin diagrammen en Wortelsystemen

0 Inleiding

In dit hoofdstuk houden we ons bezig met een mengeling van combinatoriek (graf en functies daarop), lineaire algebra (met name zekere al of niet positief definitie bilineaire vormen) en groepen (voortgebracht door spiegelingen in een collectie hyperoppervlakken in een inproductruimte).

Er blijken sterke verbanden tussen deze onderwerpen te bestaan. Een centrale rol hierbij wordt gespeeld door bepaalde grafen, die *Dynkin diagrammen* worden genoemd. De groepen en grafen die we hier tegenkomen, worden in heel uiteenlopende delen van de wetenschap gebruikt. Bijvoorbeeld in de scheikunde (crystallografie), in elementaire deeltjes fysica, en in wiskundige onderwerpen zoals Lie groepen en Lie algebra's, singulariteiten theorie enzovoorts. Bij het schrijven van dit hoofdstuk is niet gepoogd, alles zo algemeen mogelijk te houden. Het uitgangspunt is geweest, op een zo simpel mogelijke manier een indruk te geven hoe Dynkin diagrammen op een heel natuurlijke manier naar voren komen uit bepaalde elementaire vragen over groepen, spiegelingen en grafen. Daarbij zijn twee gemakkelijk te lezen teksten gebruikt:

- De eerste 5 pagina's van het overzichtsartikel
Idun Reiten, *Dynkin Diagrams and the Representation Theory of Algebras*, verschenen in Notices of the AMS, Volume 44, Number 5, May 1997.
- M. van der Put, *Wortelsystemen*, 6 pagina's in het dictaat "Meetkundige Problemen" van F. Takens, Uitgave maart 1988.

Er bestaan ook veel uitgebreidere teksten over de genoemde onderwerpen; voor wie er veel meer over wil weten noemen we

- J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Studies in Advanced Math., **29**, Cambridge Univ. Press, 1990.
- (Hoofdstuk 5 in) J-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. W.A. Benjamin, Inc., New York, 1966.

- N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie Chap. 4, 5 et 6*, Masson, Paris etc., 1981.
- (Hoofdstuk 4 in) J.H. Conway and N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, Grundlehren series vol. 290, 1993 (second edition).
- (Hoofdstuk 1 in) W. Ebeling, *Lattices and Codes*. Vieweg, Braunschweig, 1994.

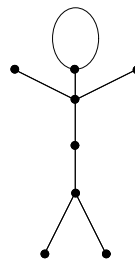
1 Grafen en bilineaire vormen

1.1 De graaf

Definitie 1.1.1 Onder een *graaf* Σ zullen we hier verstaan een niet-lege eindige verzameling $\{1, \dots, n\}$ (de *punten* van Σ), waarbij we verder bepaalde paren $\{i, j\}$ van punten een of meerdere keren “verbinden” (de *kanten* van Σ).

De graaf heet *samenhangend* als vanuit een willekeurig punt van de graaf via de kanten ieder ander punt te bereiken is.

Een graaf Σ is weer te geven door een plaatje waarin de punten van Σ gewoon als punten worden getekend, en de kanten als verbindingslijntjes tussen die punten:



Een graaf Σ met n punten wordt volledig beschreven door de bijbehorende *incidentiematrix* $A = (a_{ij})$. Dit is per definitie de $n \times n$ matrix waarvoor a_{ij} gelijk is aan het aantal kanten tussen i en j . Zo'n matrix is symmetrisch, want de kanten in onze grafen hebben geen richting. Verder staan er alleen niet-negatieve gehele getallen in zo'n incidentiematrix. Matrixvermenigvuldigen werkt precies zo, dat A^m op de i, j -plek het aantal manieren om over m kanten van i naar j te komen heeft staan. Dus samenhangend zijn van de graaf kan ook geformuleerd worden door te zeggen dat er een $m \geq 1$ bestaat zodat $I + A + A^2 + \dots + A^m$ een matrix is waarin het getal 0 niet voorkomt. De identiteitsmatrix I staat in deze som omdat anders de uitspraak onjuist zou zijn voor een graaf bestaande uit precies één punt en geen kanten.

Merk ook op dat a_{ii} in de incidentiematrix het aantal kanten van i naar zichzelf voorstelt. Zulke kanten worden wel de *lusjes* van de graaf genoemd.

Conventie: we zullen ons vanaf nu alleen bezighouden met samenhangende grafen, die bovendien geen lusjes hebben.

Deze afspraak betekent voor de incidentiematrix A , dat $a_{ii} = 0$ voor elke i , en bovendien is er een $m \geq 1$ zodat in de matrix $I + A + A^2 + \dots + A^m$ het getal 0 niet voorkomt.

Definitie 1.1.2 De *Cartan matrix* van een graaf is per definitie de matrix $C = 2I - A$, waarin I de identiteitsmatrix is, en A de incidentiematrix van de graaf.

Omdat we hebben afgesproken dat onze grafen geen lusjes hebben, heeft de Cartan matrix $C = (c_{ij})$ dus als coëfficiënten $c_{ii} = 2$ voor elke i , en voor $i \neq j$ is $-c_{ij}$ het aantal kanten tussen i en j .

1.1.3 We zullen in dit hoofdstuk onder meer een volledig antwoord geven op de volgende

Vraag 1.1.4 Voor welke grafen Σ (samenhangend, zonder lusjes) is het mogelijk om aan elk punt i een positief geheel getal f_i toe te kennen zodat voor elke i geldt

$$2f_i \geq \sum f_j,$$

waarbij de som wordt genomen over alle kanten tussen i en z'n "buren" j . We eisen daarbij bovendien dat er een i is waarvoor de gevraagde ongelijkheid ook echt een ongelijkheid is, dus $2f_i < \sum f_j$.

De laatste eis van geen gelijkheid lijkt nogal vreemd. Maar we zullen zien dat juist door die eis het antwoord heel mooi wordt.

Voorbeeld 1.1.5 We nemen de graaf Σ bestaande uit 2 punten $\{1, 2\}$, met $n \geq 1$ kanten daartussen. De Cartan matrix van deze graaf is dus $C = \begin{pmatrix} 2 & -n \\ -n & 2 \end{pmatrix}$. Een paar positieve gehele getallen (f_1, f_2) als bedoeld in Vraag 1.1.4 moet dan voldoen aan $2f_1 \geq nf_2$ en $2f_2 \geq nf_1$. Uit de ongelijkheden volgt $4f_1 \geq 2nf_2 \geq n^2f_1$, en omdat niet beide ongelijkheden gelijkheden mogen zijn levert dit $4 > n^2$ en dus $n = 1$. Dus zo'n paar kan alleen bestaan als er slechts één kant is tussen 1 en 2, en in dat geval werkt het paar $(1, 1)$.

1.1.6 De gestelde vraag formuleren we nu in termen van de Cartan matrix $C = (c_{ij})$.

Schrijf f voor de kolomvector met coördinaten f_1, \dots, f_n . Wat we willen is, dat $2f_i \geq \sum f_j$. De bijdrage van $j \neq i$ in deze som is gelijk aan f_j maal het aantal kanten tussen i en j . Met andere woorden, die bijdrage is precies $-c_{ij}f_j$. Ook geldt $c_{ii} = 2$, en dus is de eis te schrijven als

$$c_{ii}f_i \geq \sum_{j \neq i} -c_{ij}f_j,$$

oftewel als

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}f_j \geq 0.$$

Hier staat precies, dat de *ide* coördinaat van het product $C \cdot f$ niet negatief mag zijn. En de eis dat we niet voor elke i gelijkheid wilden, zegt dat ook $C \cdot f \neq 0$ moet zijn. Hiermee hebben we aangetoond:

Propositie 1.1.7 *Zij Σ een graaf (samenhangend, zonder lusjes) met Cartanmatrix C .*

Dan is Vraag 1.1.4 voor Σ equivalent met het bestaan van een vector $f \in \mathbb{R}^n$ met positieve gehele coördinaten, zodat $C \cdot f \neq 0$ en alle coördinaten van $C \cdot f$ zijn ≥ 0 . \square

1.2 De bilineaire vorm

Het standaard inproduct op \mathbb{R}^n noteren we als $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zoals bekend uit de lineaire algebra is dit een *bilineaire* vorm; dat wil zeggen $\langle v, w \rangle$ is lineair in elk van z'n argumenten v en w . De vorm is ook *symmetrisch*, oftewel $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$. Tenslotte is de vorm *positief definitief*, dat wil zeggen dat $\langle v, v \rangle > 0$ als $v \neq 0$. De standaardbasis voor \mathbb{R}^n noteren we als e_1, \dots, e_n . Deze is *orthonormaal* voor het standaardinproduct, dat wil zeggen $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (de Kronecker delta).

Bij een symmetrische $n \times n$ matrix $B = (b_{ij})$ kunnen we ook een symmetrische bilineaire vorm maken, namelijk $\langle Bv, w \rangle$. Deze is weer symmetrisch omdat B het is (merk op dat geldt $b_{ij} = \langle Be_j, e_i \rangle$). Deze vorm is in het algemeen zeker niet positief definitief (bijvoorbeeld zou B de nulmatrix kunnen zijn!). Geven we de vector v weer door coördinaten x_1, \dots, x_n , dan wordt $\langle Bv, v \rangle$ een homogene vorm van graad 2 in de x_i 's. De coefficient van x_i^2 daarin is b_{ii} , en die van $x_i x_j$ (voor $i \neq j$) is $b_{ij} + b_{ji} = 2b_{ij}$. Uit de lineaire algebra weten we, dat deze vorm positief definitief is, precies dan als alle eigenwaarden van B positief zijn. Dit zullen we niet gebruiken. Wel merken we op, dat een noodzakelijke (niet voldoende) voorwaarde voor positief definitief zijn is, dat $b_{ii} = \langle Be_i, e_i \rangle > 0$ voor elke i .

Definitie 1.2.1 De symmetrische, bilineaire vorm bij een graaf Σ met Cartanmatrix C is $\langle Cv, w \rangle$.

Verder schrijven we $q_\Sigma(v) = \frac{1}{2} \langle Cv, v \rangle$ en we noemen dit de kwadratische vorm bij Σ .

Zijn x_1, \dots, x_n de coördinaten van v , dan is dus q_Σ de homogene kwadratische uitdrukking in de x_i 's met 1 als coefficient van elke x_i^2 , terwijl de coefficient van $x_i x_j$ voor $i \neq j$ gelijk is aan de tegengestelde van het aantal kanten tussen i en j .

Vraag 1.2.2 Voor welke grafen Σ (samenhangend, zonder lusjes) is q_Σ positief definitief?

Voorbeeld 1.2.3 Neem $n \geq 2$ en zij Σ de graaf met punten $\{1, 2, \dots, n\}$ en precies één kant tussen elk van $\{1, 2\}, \dots, \{1, n\}$. (Dus een waaier van $n - 1$ kanten vanuit het centrum 1.) De vorm q_Σ hierbij is

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - \dots - x_1 x_n.$$

We substitueren $x_1 = a$ en $x_2 = \dots = x_n = b$, dan staat er

$$a^2 - (n - 1)ab + (n - 1)b^2.$$

Dit is alleen maar positief voor elke $(a, b) \neq (0, 0)$ indien de discriminant $(n - 1)^2 - 4(n - 1) = (n - 1)(n - 5)$ negatief is, oftewel als $n = 2, 3$ of 4.

En in elk van deze drie overblijvende gevallen blijkt ook inderdaad de vorm q_Σ positief definitief te zijn. Immers, schrijf

$$q_\Sigma(x_1, \dots, x_n) = \frac{5 - n}{4} x_1^2 + \left(\frac{1}{2} x_1 - x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} x_1 - x_n\right)^2.$$

Hiermee kan je natuurlijk ook direct zien voor welke n de vorm positief definitief is, zonder de truuk met de a en de b .

Er blijkt een mooi verband te bestaan tussen Vraag 1.1.4 en Vraag 1.2.2:

Propositie 1.2.4 *Zij Σ met Cartanmatrix $C = (c_{ij})$ en vorm q_Σ gegeven. Een positief antwoord op Vraag 1.1.4 voor Σ impliceert een positief antwoord op Vraag 1.2.2. Preciezer gezegd:*

Als er een f bestaat met positieve gehele coördinaten waarvoor geen enkele coördinaat van $C \cdot f$ negatief is en $C \cdot f \neq 0$, dan volgt dat q_Σ positief definitief is.

Bewijs. Neem f zoals gegeven in de Propositie. Bij elke paar punten i, j van Σ maken we een vorm

$$q_{i,j} := \frac{-c_{ij}}{f_i f_j} (f_i x_j - f_j x_i)^2.$$

Bezie dan $\sum q_{i,j}$, waar de som genomen wordt over alle paren punten i, j met $i < j$ van Σ . Coëfficiënten vergelijken levert, dat

$$2q_\Sigma = \sum_{i < j} q_{i,j} + \sum_{i=1}^n \frac{(Cf)_i}{f_i} x_i^2,$$

waarbij $(Cf)_i$ de i de coördinaat van $C \cdot f$ voorstelt. Dit geeft een schrijfwijze van q_Σ als som van kwadraten met positieve coëfficiënten. Dus in ieder geval geldt $q_\Sigma(v) \geq 0$ voor elke $v \in \mathbb{R}^n$.

Stel nu dat $q_\Sigma(x_1, \dots, x_n) = 0$. Dan is ieder van de kwadraten in de schrijfwijze hierboven nul. Dus ook $x_i = 0$ voor elke i met $(Cf)_i \neq 0$ (merk op dat er zulke i zijn). Uitgaande van een i met $x_i = 0$, neem een kant tussen i en een j . Dan is ook $q_{i,j}(x_1, \dots, x_n) = 0$, en dat levert uitgeschreven, dat $x_j = 0$. De samenhang van Σ impliceert vervolgens dat alle $x_i = 0$. Hiermee is aangetoond dat q_Σ positief definitief is. \square

1.2.5 In feite blijkt het verband tussen beide vragen zelfs nog mooier: ze zijn equivalent. Dat zullen we veel verderop in dit hoofdstuk (Gevolg 1.5.6) bewijzen.

1.3 De Weyl groep en de wortels

Laat de graaf Σ met Cartanmatrix $C = (c_{ij})$ gegeven zijn. Bij elk punt i van Σ wordt een lineaire afbeelding

$$\sigma_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x - \langle Cx, e_i \rangle e_i$$

gemaakt. Merk op dat $\sigma_i(e_j) = e_j - c_{ij}e_i$, dus in het bijzonder $\sigma_i(e_i) = -e_i$. De afbeeldingen σ_i hebben orde 2, dat wil zeggen $\sigma_i^2 = id$ en $\sigma_i \neq id$. Dit kan je zien als de “reden” waarom in de Cartanmatrix per definitie het getal 2 op de diagonaal wordt gezet: alleen dan heeft elke σ_i orde 2. Elke σ_i is dus een element van de groep $GL(n, \mathbb{R})$ van inverteerbare lineaire afbeeldingen van \mathbb{R}^n naar zichzelf.

In het geval dat $\langle Cv, w \rangle$ een inproduct op \mathbb{R}^n definieert (met andere woorden, als deze vorm positief definitief is), dan is σ_i de loodrechte spiegeling ten opzichte van dit inproduct in het hypervlak loodrecht op e_i .

Definitie 1.3.1 De Weyl groep W_Σ van een graaf Σ is per definitie de ondergroep van $GL(n, \mathbb{R})$ voortgebracht door alle σ_i .

De wortels van Σ zijn de vectoren in de verzameling

$$R_\Sigma := \{\sigma(e_i) \mid 1 \leq i \leq n, \sigma \in W_\Sigma\}.$$

Een aantal eigenschappen van de Weyl groep en de bijbehorende wortels staan opgesomd in de volgende

Propositie 1.3.2 Laat Σ een graaf zijn met Cartanmatrix C , Weyl groep W en verzameling wortels R .

1. Er geldt dat $0 \notin R$ en R bevat een basis voor \mathbb{R}^n .
2. Elke $\sigma \in W$ behoudt de vorm $\langle Cv, w \rangle$, dat wil zeggen $\langle C\sigma(v), \sigma(w) \rangle = \langle Cv, w \rangle$.
3. Voor elke $r \in R$ geldt $\langle Cr, r \rangle = 2$.
4. Ten opzichte van de standaardbasis wordt elke $\sigma \in W$ gegeven door een matrix met gehele coëfficiënten.
5. Er geldt $R \subset \mathbb{Z}^n$.
6. Voor elke $r \in R$ is $\sigma_r : x \mapsto x - \langle Cx, r \rangle r$ een element van W .
7. Voor $r_1, r_2 \in R$ is $\sigma_{r_1}(r_2) - r_2$ een geheel veelvoud van r_1 .

Bewijs. (1) Omdat de $\sigma \in W$ inverteerbaar zijn, is $\sigma(e_i) \neq 0$, dus $0 \notin R$. Verder bevat R per definitie de standaardbasis van \mathbb{R}^n .

(2) Het is voldoende, dit aan te tonen voor de voortbrengers $\sigma_i \in W$. Daarvoor geldt

$$\begin{aligned} \langle C\sigma_i(v), \sigma_i(w) \rangle &= \langle Cv - \langle Cv, e_i \rangle Ce_i, w - \langle Cw, e_i \rangle e_i \rangle \\ &= \langle Cv, w \rangle - \langle Cv, e_i \rangle \langle Cw, e_i \rangle - \langle Cv, e_i \rangle \langle Ce_i, w \rangle + \langle Cv, e_i \rangle \langle Cw, e_i \rangle \langle Ce_i, e_i \rangle \\ &= \langle Cv, w \rangle, \end{aligned}$$

waarbij gebruikt is dat $\langle Ce_i, e_i \rangle = 2$ en ook dat C symmetrisch is.

(3) Laat $r = \sigma(e_i) \in R$. Vanwege (2) is dan

$$\langle Cr, r \rangle = \langle C\sigma(e_i), \sigma(e_i) \rangle = \langle Ce_i, e_i \rangle = 2.$$

(4) Omdat $\sigma_i(e_j) = e_j - c_{ij}e_i$, worden de σ_i 's ten opzichte van de standaardbasis gegeven door matrices met gehele coëfficiënten. Elke $\sigma \in W$ is te schrijven als een product $\sigma = \sigma_{i_1} \cdot \dots \cdot \sigma_{i_t}$ (negatieve machten komen niet voor omdat elke σ_i z'n eigen inverse is). Dus ook de matrix van een $\sigma \in W$ heeft gehele coëfficiënten.

(5) volgt direct uit (4) en uit het feit dat de e_i in \mathbb{Z}^n zitten.

(6) Laat $r \in R$, en schrijf $r = \sigma(e_i)$ met $\sigma \in W$. Dan geldt $\sigma \cdot \sigma_i = \sigma_r \cdot \sigma$, zoals met behulp van (2) direct uit de definities valt na te rekenen. Met andere woorden, $\sigma_r = \sigma \cdot \sigma_i \cdot \sigma^{-1}$, en dat is een element van de groep W .

(7) Laat $r_1, r_2 \in R$, dan is per definitie $\sigma_{r_1}(r_2) - r_2 = \langle Cr_2, r_1 \rangle r_1$. Vanwege (5) en het feit dat de coëfficiënten van C geheel zijn volgt dat $\langle Cr_2, r_1 \rangle \in \mathbb{Z}$. \square

1.4 Het verband

In deze paragraaf geven we het verband tussen enerzijds de Weyl groep en de wortels van een graaf, en anderzijds positief definitief zijn van de kwadratische vorm. We beginnen met

Lemma 1.4.1 Laat Σ een graaf zijn met Cartanmatrix C en Weyl groep W .

Als de vorm $\langle Cv, w \rangle$ positief definitief is, dan is de actie van W op \mathbb{R}^n irreducibel (dat wil zeggen, er bestaat geen lineaire deelruimte $V \neq (0)$, $\neq \mathbb{R}^n$ die door elk element van W weer binnen zichzelf wordt afgebeeld).

Bewijs. Stel dat $V \neq (0)$ een deelruimte is die door W naar zichzelf wordt afgebeeld. Kies dan $v \in V$ met $v \neq 0$. Omdat de vorm bij Σ positief definitief is, bestaat er een standaard basisvector e_i met $\langle Ce_i, v \rangle \neq 0$. Zowel v als $\sigma_i(v)$ zijn elementen van V , en dus ook hun verschil $v - \sigma_i(v) = \langle Ce_i, v \rangle e_i \in V$. Hieruit volgt dat $e_i \in V$. Neem nu een j zodat er in Σ een kant loopt tussen i en j . Dan is per definitie $\langle Ce_i, e_j \rangle \neq 0$, en $e_i - \sigma_j(e_i) = \langle Ce_i, e_j \rangle e_j$ zit in V , dus ook $e_j \in V$. Uit de samenhang van Σ volgt dan dat alle standaard basisvectoren in V zitten, en dus $V = \mathbb{R}^n$. \square

Het volgende lemma lijkt sterk op het bovenstaande maar is wat lastiger te bewijzen.

Lemma 1.4.2 Laat Σ een graaf zijn met Cartanmatrix C en Weyl groep W .

Als de groep W eindig is, dan is de actie van W op \mathbb{R}^n irreducibel.

Bewijs. Stel dat de lineaire deelruimte $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ door elk element van W op zichzelf wordt afgebeeld. We zullen eerst laten zien, dat er een deelruimte $V_2 \subset \mathbb{R}^n$ bestaat met dezelfde eigenschap, en zodat $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$ (dat wil zeggen, elke vector in \mathbb{R}^n is te schrijven als som $v_1 + v_2$ met $v_i \in V_i$, en $V_1 \cap V_2 = (0)$). Dit is een bekend argument uit de representatietheorie van eindige groepen: kies een lineaire afbeelding $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ met $\varphi^2 = \varphi$ en $\varphi(\mathbb{R}^n) = V_1$ (een projectie op V_1 , dus). Definieer vervolgens

$$P := \frac{1}{\#W} \sum_{\sigma \in W} \sigma \varphi \sigma^{-1}.$$

Dan is ook P een projectie op V_1 , immers elke vector uit \mathbb{R}^n wordt door P naar V_1 afgebeeld, en bovendien is $P(v) = v$ voor $v \in V_1$. De reden dat we naar P kijken in plaats van naar de oorspronkelijke φ , is dat P als extra eigenschap heeft dat $\sigma P = P \sigma$ voor $\sigma \in W$.

Neem nu $V_2 := \text{Ker}(P) = \text{Beeld}(id - P)$. Het is evident dat deze de gezochte eigenschappen heeft.

Schrijf $e_1 = v_1 + v_2$, met $v_i \in V_i$. Omdat

$$2 = \langle Ce_1, e_1 \rangle = \langle Ce_1, v_1 \rangle + \langle Ce_1, v_2 \rangle,$$

is $\langle Ce_1, v_i \rangle \neq 0$ voor een i . We nemen aan dat dit geldt voor $i = 1$ (verwissel anders de rollen van V_1 en V_2). We kunnen nu verder redeneren op precies dezelfde wijze als in het bewijs van Lemma 1.4.1: er geldt

$$0 \neq \langle Cv_1, e_1 \rangle e_1 = v_1 - \sigma_1(v_1) \in V_1,$$

en dus $e_1 \in V_1$. Alle e_j waarvoor er een kant is tussen 1 en j zitten dan ook in V_1 , enzovoorts. De samenhang van Σ impliceert zo, dat $V_1 = \mathbb{R}^n$. \square

Stelling 1.4.3 Voor een graaf Σ met Cartanmatrix C , Weyl groep W en verzameling wortels R zijn de volgende drie uitspraken equivalent.

1. De vorm $\langle Cv, w \rangle$ is positief definitief.
2. De verzameling wortels R is eindig.
3. De Weyl groep W is eindig.

Bewijs. De implicatie (1) \Rightarrow (2) volgt uit Propositie 1.3.2. Immers, deze zegt onder meer dat de wortels vectoren zijn met gehele coördinaten en lengte $\sqrt{2}$ ten opzichte van het door $\langle Cv, w \rangle$ gegeven inproduct. Van zulke vectoren kunnen er maar eindig veel bestaan.

(2) \Rightarrow (3): elk element van W werkt als een permutatie op de verzameling wortels R . En omdat R een basis van \mathbb{R}^n bevat, legt deze permutatie zo'n element van W helemaal vast. Is dus R eindig, dan zijn er maar eindig veel permutaties van R en dus is ook W dan eindig.

Tenslotte bewijzen we (3) \Rightarrow (1). Definieer daartoe voor $v, w \in \mathbb{R}^n$ de vorm

$$[v, w] := \sum_{\sigma \in W} \langle \sigma(v), \sigma(w) \rangle.$$

Omdat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct is, is $[\cdot, \cdot]$ het ook. En bovendien is het zo gemaakt, dat de $\sigma \in W$ orthogonaal zijn ten opzichte van $[\cdot, \cdot]$; dat wil zeggen $[\sigma(v), \sigma(w)] = [v, w]$ voor alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ en alle $\sigma \in W$.

Er bestaat dan een matrix A zodat $\langle Cv, w \rangle = [Av, w]$ voor alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Immers, kies een orthonormale basis $\{f_1, \dots, f_n\}$ ten opzichte van $[\cdot, \cdot]$, neem $a_{i,j} = \langle Cf_j, f_i \rangle$ en A zo dat $Af_i = \sum_j a_{i,j} f_j$ voor alle i . Dan geldt

$$\begin{aligned} [A\sigma(v), \sigma(w)] &= \langle C\sigma(v), \sigma(w) \rangle \\ &= \langle Cv, w \rangle = [Av, w] \\ &= [\sigma Av, \sigma w], \end{aligned}$$

dus $A\sigma = \sigma A$ voor elke $\sigma \in W$.

Merk nu op, dat uit (3) en Lemma 1.4.2 volgt dat de actie van W op \mathbb{R}^n irreducibel is. Het onderstaande Lemma 1.4.5 impliceert dan dat geldt $A = \lambda I$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$. En dus $\langle Cv, v \rangle = \lambda[v, v]$. Dit impliceert (1), want door bijvoorbeeld $v = e_1$ in te vullen zie je dat $\lambda > 0$, en verder is $[v, v] > 0$ voor elke $v \neq 0$. \square

Lemma 1.4.4 Als A en S twee $n \times n$ matrices met coëfficiënten in een lichaam K zijn, waarvoor geldt dat $AS = SA$ en $\text{rang}(I - S) = 1$, dan heeft A een eigenwaarde $\lambda \in K$.

Bewijs. Omdat $\text{rang}(I - S) = 1$, is er een vector $v \neq 0$ in K^n die het beeld van $I - S$ voortbrengt. Schrijf $v = (I - S)x = x - Sx$ voor zekere x , dan volgt $Av = Ax - ASx = Ax - SAx = (I - S)Ax$. Met andere woorden, Av zit in het beeld van $I - S$, en is dus te schrijven als λv voor zekere $\lambda \in K$. \square

Lemma 1.4.5 Stel dat een groep $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$ de volgende twee eigenschappen heeft:

1. G werkt irreducibel op \mathbb{R}^n (oftewel, zoals al eerder gezegd, de enige lineaire deelruimten die door elk element van G binnen zichzelf worden afgebeeld zijn 0 en \mathbb{R}^n).
2. Er is een $\sigma \in G$ met de eigenschap $\text{rang}(I - \sigma) = 1$.

Als dan voor elke $\sigma \in G$ geldt dat $A\sigma = \sigma A$ voor zekere matrix A , dan is $A = \lambda I$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Uit de tweede eigenschap en Lemma 1.4.4 volgt dat A een eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ heeft. Zij V_λ de bijbehorende eigenruimte. Uit het gegeven dat A met elke $\sigma \in G$ commuteert volgt dat elke $\sigma \in G$ deze eigenruimte weer binnen zichzelf afbeeldt. Omdat $V_\lambda \neq 0$ levert de eerste eigenschap van de groep G nu dat $V_\lambda = \mathbb{R}^n$, oftewel dat $A = \lambda I$. \square

We zullen tenslotte nog enkele eigenschappen afleiden van de verzameling wortels en de werking van de Weyl groep daarop, voor het geval dat de equivalente uitspraken van Stelling 1.4.3 gelden. Merk op, dat voor de bewijzen die we hieronder geven, in feite uit deze paragraaf alleen Lemma 1.4.1 wordt gebruikt.

Lemma 1.4.6 Als de vorm q_Σ positief definit is, dan geldt voor een tweetal wortels $r, s \in R$ dat $\langle Cr, s \rangle \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. En $\langle Cr, s \rangle = \pm 2$ precies dan, als $r = \pm s$.

Bewijs. Propositie 1.3.2 (3) zegt dat $\langle Cr, r \rangle = \langle Cs, s \rangle = 2$. De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, toegepast op het inproduct $\langle Cv, w \rangle$ en op de vectoren r, s levert dan, dat $\langle Cr, s \rangle^2 \leq \langle Cr, r \rangle \cdot \langle Cs, s \rangle = 4$. De ongelijkheid hierin is een gelijkheid precies dan als $r = \pm s$. Omdat ook $\langle Cr, s \rangle \in \mathbb{Z}$ vanwege Propositie 1.3.2 (7), volgt het lemma. \square

Propositie 1.4.7 Als de vorm q_Σ positief definit is, dan is de actie van de Weyl groep W op de verzameling wortels R transitief. (Dat wil zeggen, bij elk tweetal $r, s \in R$ bestaat een $\sigma \in W$ met $\sigma(r) = s$.)

Bewijs. Laat twee wortels r, s gegeven zijn. Beschouw de verzameling S bestaande uit alle wortels van de vorm $\sigma(r)$, waarbij σ de Weyl groep doorloopt. Het opspansel in \mathbb{R}^n van deze verzameling is een lineaire deelruimte die door W weer binnen zichzelf wordt afgebeeld. Vanwege Lemma 1.4.1 is dat dus de hele \mathbb{R}^n . Dit impliceert, dat er een $\sigma \in W$ is met $\langle C\sigma(r), s \rangle \neq 0$ (want anders zou s loodrecht staan op elke vector in onze verzameling S ten aanzien van het door $\langle Cv, w \rangle$ gegeven inproduct, en dan zou gelden $s = 0$). Neem zo'n σ en schrijf $t = \sigma(r) \in S$.

We moeten bewijzen dat $s \in S$. Merk daartoe allereerst op, dat als $v \in S$ dan ook $-v \in S$. Immers, een element $v \in S$ is een wortel; vanwege Propositie 1.3.2 (6) is dan de spiegeling $\sigma_v \in W$ en derhalve $-v = \sigma_v(v) \in S$. Hieruit volgt, dat we door eventueel s door $-s$ te vervangen mogen aannemen dat $\langle Ct, s \rangle > 0$. Lemma 1.4.6 zegt dan, dat uit dit inproduct 1 of 2 komt.

Is $\langle Ct, s \rangle = 2$, dan volgt bovendien uit Lemma 1.4.6 dat $s = t \in S$, en we zijn klaar. Het resterende geval is dat $\langle Ct, s \rangle = 1$. Maar in dat geval geeft een eenvoudige berekening dat $-s = \sigma_t \sigma_s(t) \in S$, en opnieuw volgt $s \in S$. \square

1.5 Classificatie

We komen nu terug op Vraag 1.2.2: voor welke grafen Σ is de vorm q_Σ positief definitief? Het blijkt, dat zulke grafen allemaal te classificeren zijn. Om dit te doen, leiden we een aantal eigenschappen af van grafen Σ waarvoor q_Σ positief definitief is.

Lemma 1.5.1 Als q_Σ positief definitief is, dan bevat Σ geen punten $i \neq j$ waartussen meerdere kanten liggen.

Bewijs. Stel dat er $m \geq 1$ kanten liggen tussen i en j . Bekijk de vector $v = (x_1, \dots, x_n)$ met $x_i = m$ en $x_j = 2$ en $x_k = 0$ als $k \notin \{i, j\}$. Dan is $q_\Sigma(v) = m^2 + 4 - m \cdot 2 \cdot m = 4 - m^2$. Omdat dit positief moet zijn, is $m = 1$. (alternatief bewijs: gebruik Lemma 1.4.6.) \square

Lemma 1.5.2 Als q_Σ positief definitief is, dan bevat Σ geen cyclen (dat wil zeggen, een rij punten $1, \dots, m$ met een kant tussen i en $i + 1$, voor elke $i < m$, en een kant tussen 1 en m).

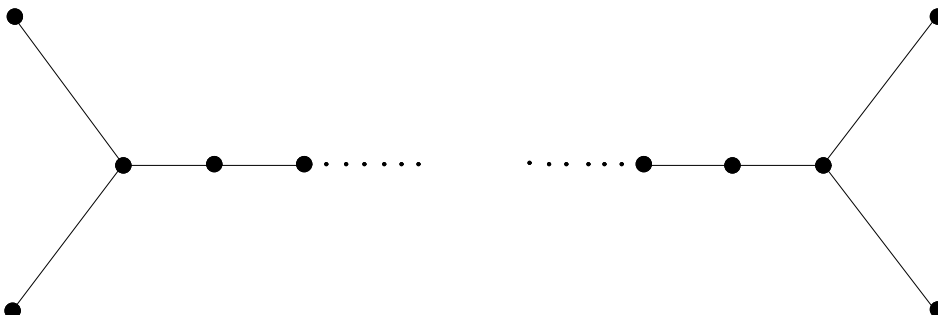
Bewijs. Neem anders de vector $v = (x_1, \dots, x_n)$ met $x_i = a_i$ voor $i \leq m$ en $x_i = 0$ voor $i > m$. Dan is $q_\Sigma(v) = a_1^2 + \dots + a_m^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3 - \dots - a_m a_1$. Dit levert 0 op als we alle $a_i = 1$ kiezen. \square

Lemma 1.5.3 Als q_Σ positief definitief is, dan bevat Σ geen punt waar meer dan drie kanten bij elkaar komen.

Bewijs. Dit is precies de uitspraak van Voorbeeld 1.2.3. \square

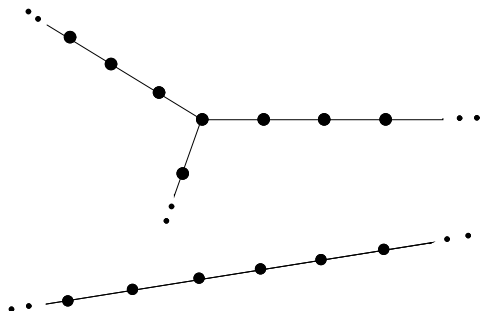
Lemma 1.5.4 Als q_Σ positief definitief is, dan bevat Σ hooguit één punt waar drie kanten bij elkaar komen.

Bewijs. Als er meerdere zulke punten van Σ zouden zijn, dan bevat Σ een deelgraaf met $4 + r$ punten als volgt:



Neem dan de vector v met als coördinaten 1 corresponderend met de vier eindpunten van deze deelgraaf, 2 met de overige r punten van de deelgraaf, en 0 verder. Dan is $q_\Sigma(v) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + r \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - (r - 1) \cdot 4 = 0$, in tegenspraak met het positief definitief zijn. \square

De vier lemma's tonen aan, dat er nog maar twee mogelijke "vormen" voor een graaf met positief definitie bijbehorende vorm mogelijk zijn: het is ofwel een rij punten met tussen elke twee opeenvolgenden precies één kant, ofwel het zijn drie van zulke rijen met een gemeenschappelijk eindpunt.



De tweede mogelijkheid gaan we nu verder analyseren. Noem het aantal punten in de drie takken respectievelijk $p + 1$, $q + 1$ en $r + 1$, waarbij we mogen aannemen dat $p \leq q \leq r$. De graaf bestaat dus uit $n = p + q + r + 1$ punten. Schrijf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus P \oplus Q \oplus R$, waarbij \mathbb{R} correspondeert met het gemeenschappelijk eindpunt en P, Q, R met de rest van de drie takken. Dus $\dim P = p$, enzovoorts. Omdat er behalve voor het gemeenschappelijke eindpunt geen kanten zijn tussen punten van verschillende takken, geldt $P \perp Q$ en $P \perp R$ en $Q \perp R$ voor het inproduct $\langle Cv, w \rangle =: [v, w]$.

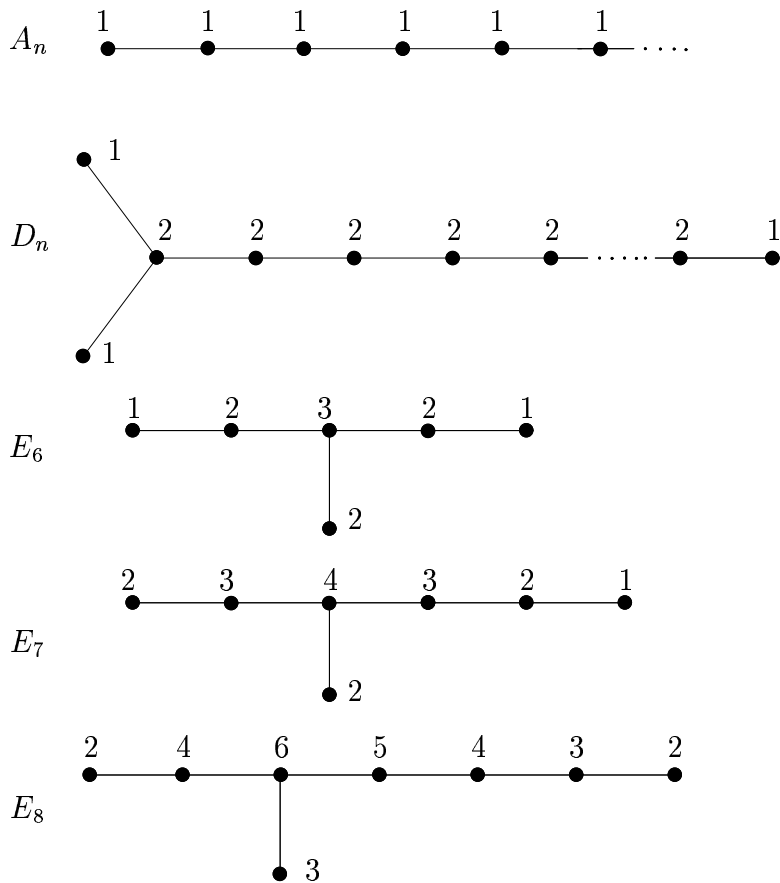
Neem in P de vector $v_P = \frac{1}{p+1}(p, \dots, 2, 1)$ (uitgeschreven op de basis corresponderend met punten van onze graaf; de volgorde is zo dat de grootste coördinaat bij de basisvector hoort die direct naast het gemeenschappelijke eindpunt 'ligt'). Geheel analoog hebben we $v_Q \in Q$ en $v_R \in R$. We bepalen nu $[v, v] = \langle Cv, v \rangle$ voor de vector $v = 1 \oplus v_P \oplus v_Q \oplus v_R$. Hiervoor is het handig, v te schrijven als som van de 4 gegeven componenten. Er geldt $[v_P, v_Q] = [v_P, v_R] = [v_Q, v_R] = 0$. Verder $[1, 1] = 2$ en $[1, v_P] = -p/(p+1)$. En tenslotte $[v_P, v_P] = \frac{2}{(p+1)^2} (\sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^p i(i-1)) = p/(p+1)$. Zo volgt dat $[v, v] = 2 + p/(p+1) + q/(q+1) + r/(r+1) - 2p/(p+1) - 2q/(q+1) - 2r/(r+1) = 1/(p+1) + 1/(q+1) + 1/(r+1) - 1$.

Deze uitdrukking is positief omdat we aannemen dat onze vorm positief definitief is. Met andere woorden, we hebben hier de voorwaarde

$$1/(p+1) + 1/(q+1) + 1/(r+1) > 1$$

afgeleid. Van deze ongelijkheid zijn gemakkelijk alle mogelijke oplossingen te vinden. Immers, we hebben $1 \leq p \leq q \leq r$, dus $1/2 \geq 1/(p+1) \geq 1/(q+1) \geq 1/(r+1)$. Hieruit volgt dat $p = 1$, want anders waren alle drie breuken $\leq 1/3$ en dus hun som ≤ 1 . Je kan nu verder eenvoudig alle mogelijkheden aflopen. Als ook $q = 1$, dan mag $r \geq 1$ willekeurig zijn. Is $q = 2$, dan volgt $1/2 + 1/3 + 1/(r+1) > 1$ en dus $r = 2$ of $r = 3$ of $r = 4$. En voor $q \geq 3$ zijn er geen oplossingen. Hiermee komen we tot het volgende resultaat.

Stelling 1.5.5 *De samenhangende grafen Σ met de eigenschap dat de door hun Cartanmatrix gegeven bilineaire vorm positief definitief is, zijn de grafen A_n met $n \geq 1$ punten en D_n met $n \geq 4$ punten en E_6 en E_7 en E_8 , gegeven als volgt:*



Bewijs. We hebben al gezien dat de enige mogelijkheden voor een samenhangende graaf met positieve bilineaire vorm, de in de stelling gegeven grafen zijn. Wat dus overblijft, is inzien dat inderdaad al deze grafen aanleiding geven tot een positief definitie bilineaire vorm. Dit volgt direct uit Propositie 1.2.4, als voor de daar genoemde vector f degene wordt genomen met coördinaten zoals in bovenstaande grafen staat aangegeven. \square

Merk op, dat bovenstaand bewijs meteen ook de omkering van Propositie 1.2.4 bewijst:

Gevolg 1.5.6 Zij Σ een samenhangende graaf met Cartanmatrix C en kwadratische vorm q_Σ .

Dan is q_Σ positief definitief precies dan, als er een vector f bestaat met positieve gehele coördinaten waarvoor geldt dat geen enkele coördinaat van Cf negatief is en bovendien dat $Cf \neq 0$.

Deze equivalente uitspraken gelden alleen voor de door de diagrammen A_n , D_n en E_6 , E_7 , E_8 gegeven grafen. \square

Definitie 1.5.7 De grafen genoemd in Stelling 1.5.5 worden *Dynkin diagrammen* (ook wel, Coxeter diagrammen) van type A_n , D_n respectievelijk E_6 of E_7 of E_8 genoemd.

1.6 De voorbeelden

We gaan nu voor elk van de Dynkin diagrammen het aantal wortels bepalen, en iets over de bijbehorende Weyl groep zeggen. Hiertoe gaan we als volgt te werk.

Stel dat we in een zekere \mathbb{R}^m , voorzien van het standaard inproduct, vectoren r_1, \dots, r_n vinden zodat $\langle r_i, r_j \rangle$ precies de Cartan matrix is van een Dynkin diagram. Dan zijn deze vectoren lineair onafhankelijk, want de Cartan matrix van een Dynkin diagram is inverteerbaar. Zij $V \subset \mathbb{R}^m$ de lineaire deelruimte opgespannen door de r_i 's. De lineaire afbeeldingen φ_i , gegeven door $\varphi_i(v) = v - \langle v, r_i \rangle r_i$, beelden dan V op V af, en ten opzichte van de gegeven basis voor V leveren ze precies dezelfde matrices als de voortbrengers van de Weyl groep behorende bij het gegeven Dynkin diagram. Met andere woorden, we kunnen de verzameling wortels identificeren met de beelden van de r_i 's onder producten van de φ_j 's, en de Weyl groep met de groep voortgebracht door de φ_j 's.

Voorbeeld 1.6.1 A_n .

Kies in \mathbb{R}^{n+1} met standaard orthonormale basis e_1, \dots, e_{n+1} de vectoren

$$r_1 = e_2 - e_1, \quad r_2 = e_3 - e_2, \quad \dots, \quad r_n = e_{n+1} - e_n.$$

Dan geldt $\langle r_i, r_i \rangle = 2$ en $\langle r_i, r_j \rangle$ is 0 als $|i - j| \geq 2$ en -1 als $|i - j| = 1$. Dus deze vectoren leveren precies het Dynkin diagram A_n . De bijbehorende "spiegelingen" φ_i , gezien als lineaire afbeelding op de hele \mathbb{R}^{n+1} , voldoen aan $\varphi_i(e_j) = e_j$ als $j \neq i, i+1$ en $\varphi_i(e_i) = e_{i+1}$ en $\varphi_i(e_{i+1}) = e_i$. Dus φ_i verwisselt e_i en e_{i+1} en houdt alle overige standaard basisvectoren vast. Elke permutatie van de $n+1$ basisvectoren is als product van zulke buurverwisselingen te schrijven, en de conclusie is dat de Weyl groep in dit geval isomorf is met de permutatie groep S_{n+1} . Het beeld van een wortel r_j onder zo'n permutatie is van de vorm $e_k - e_\ell$, met $k \neq \ell$, en elk van deze vectoren komt als beeld voor.

Er zijn dus in totaal $n(n+1)$ wortels, en de Weyl groep bestaat uit $(n+1)!$ elementen.

Voorbeeld 1.6.2 D_n voor $n \geq 4$.

Door een van de "pootjes" van het diagram D_n weg te laten ontstaat het diagram A_{n-1} . We beginnen dus met de vectoren

$$r_1 = e_2 - e_1, \quad r_2 = e_3 - e_2, \quad \dots, \quad r_{n-1} = e_n - e_{n-1}$$

in \mathbb{R}^n . Hieraan moet dan nog een vector r_n worden toegevoegd die voldoet aan $\langle r_n, r_i \rangle = 2$ voor $i = n$ en -1 voor $i = 2$ en 0 voor alle overige i . Het is eenvoudig na te gaan dat

$$r_n = e_1 + e_2$$

een vector is die aan deze eisen voldoet.

De werking van φ_1 tot en met φ_{n-1} op de vectoren e_1, \dots, e_n kennen we al uit het voorbeeld van de A_n : deze brengen een groep isomorf met de permutatie groep S_n voort. Verder is $\varphi_n(e_i) = e_i$ voor $i \geq 3$ en $\varphi_n(e_1) = -e_2$ en $\varphi_n(e_2) = -e_1$. Er volgt dat $\varphi_1 \varphi_n$ de eerste twee basisvectoren van teken verwisselt en de overige vasthoudt. Door dit te combineren met andere permutaties, zijn ieder tweetal basisvectoren van teken te verwisselen. Producten van zulke tekenwisselingen leveren alle afbeeldingen die een even aantal basisvectoren van teken

verwisselen en de overige vasthouden. Zo vind je, dat de Weyl groep bestaat uit producten van permutaties en zulke tekenwisselingen; er geldt dus

$$\#W_{D_n} = 2^{n-1}n! \quad \text{voor } n \geq 4.$$

De wortels zijn dan alle vectoren $\pm e_k \pm e_\ell$ met $k \neq \ell$. Hiervan zijn er in totaal $2n(n-1)$.

Voorbeeld 1.6.3 E_8 .

Door een pootje van het Dynkin diagram van E_8 wat in te korten, ontstaat het diagram van D_7 . We beginnen daarom met de vectoren

$$r_2 = e_2 - e_1, \quad r_3 = e_3 - e_2, \quad \dots, \quad r_7 = e_7 - e_6 \quad \text{en} \quad r_8 = e_1 + e_2$$

in \mathbb{R}^8 . Hieraan voegen we dan nog een $r_1 \in \mathbb{R}^8$ toe die moet voldoen aan $\langle r_1, r_i \rangle = 2$ voor $i = 1$ en $= -1$ voor $i = 2$ en $= 0$ voor de overige i . Een van de beide vectoren die hieraan voldoen is

$$r_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1).$$

Door net als in de voorbeelden van A_n en D_n de werking van de voortbrengers van de Weyl groep op de standaard basisvectoren uit te rekenen, volgt vrij snel dat de verzameling wortels in dit geval bestaat uit alle $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ waarin een even aantal mintekens voorkomen, plus alle vectoren $\pm e_k \pm e_\ell$ met $k \neq \ell$. In totaal zijn er dus $2^7 + 2 \cdot 8 \cdot 7 = 240$ wortels.

Het is wat lastig om ook de orde van de Weyl groep te bepalen. We zullen gebruik maken van het volgende resultaat.

Stelling 1.6.4 *Gegeven een Dynkin diagram dat bestaat uit n punten, met Cartan matrix C . Stel dat $s_i \in \mathbb{R}^n$ een vector $\neq 0$ is met $\langle C s_i, e_j \rangle = 0$ voor $i \neq j$.*

Dan geldt $\text{Stab}(s_i) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n \rangle$ (de ondergroep van W voortgebracht door de σ_j met $i \neq j$).

Hierin is $\text{Stab}(s)$ de stabilisator van s ; dit is de ondergroep $\{\sigma \in W \mid \sigma(s) = s\}$ van W .

Deze stelling schijnt voor het eerst bewezen te zijn door de Duitse wiskundige E. Witt in 1941. Merk op dat $\sigma_j(s_i) = s_i - \langle C r_j, s_i \rangle r_j$, en dat is gelijk aan s_i zodra $j \neq i$. Dit bewijst dat de ondergroep voortgebracht door zulke σ_j inderdaad in $\text{Stab}(s_i)$ zit. De omgekeerde inclusie is niet zo snel te zien. We laten het bewijs achterwege; zie ervoor onder andere het boek L.C. Benson en C.T. Grove, *Finite Reflection Groups*. Springer-Verlag, GTM 99, second edition, 1985, pagina 77. Voor elk gegeven Dynkin diagram en een geschikt gekozen i is de stelling overigens redelijk eenvoudig te bewijzen.

In het geval van de E_8 kiezen we $s_7 = e_7 + e_8$. Die staat niet alleen loodrecht op r_1, \dots, r_6, r_8 maar het is bovendien een wortel. Uit Propositie 1.4.7 volgt, dat de beelden van s_7 onder W precies alle wortels zijn, en dat zijn er 240. Er volgt dan dat $\#W = 240 \cdot \#\text{Stab}(s_7)$. De stelling van Witt zegt in dit geval, dat deze stabilisator de groep is voortgebracht door de spiegelingen behorend bij de wortels r_1, \dots, r_6, r_8 . Deze wortels horen bij het diagram E_7 , dus kennelijk is $\text{Stab}(s_7) \cong W_{E_7}$.

We zullen hieronder zien, dat deze $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ elementen heeft, en dan volgt

$$\#W_{E_8} = 240 \cdot 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Voorbeeld 1.6.5 E_7 .

In het voorbeeld van E_8 hebben we de basiswortels bij E_7 al gevonden, en in feite ging dat door alles te beperken tot de deelruimte $(\mathbb{R} \cdot (e_7 + e_8))^\perp \subset \mathbb{R}^8$.

De bijbehorende wortels zijn dan alle $\pm e_k \pm e_\ell$ met $k \neq \ell$ en $k, \ell \leq 6$, verder $\pm e_7 \mp e_8$ en tenslotte alle $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \mp 1)$ (de laatste coördinaat moet tegengesteld zijn aan die ervoor) met een even aantal mintekens. In totaal levert dit $60 + 2 + 64 = 126$ wortels. De orde van de Weyl groep is met eenzelfde idee als bij E_8 te vinden: neem de wortel $s_1 = e_7 - e_8$, deze staat loodrecht op r_2, \dots, r_6, r_8 . Laatstgenoemde wortels leveren een systeem D_6 , en uit de stelling van Witt volgt dat de stabilisator van s_1 in W_{E_7} een groep is met $2^5 \cdot 6! = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$ elementen. Voor de Weyl groep zelf geldt dan

$$\#W_{E_7} = 126 \cdot 2^9 \cdot 3 \cdot 5 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Voorbeeld 1.6.6 E_6 .

Ook voor het resterende geval van de E_6 kan je beginnen met de voor E_8 gegeven vectoren. De deelverzameling $r_1, r_2, \dots, r_5, r_8$ daarvan levert de Cartan matrix van E_6 , en ze spannen de deelruimte $(\mathbb{R} \cdot (e_6 + e_8) + \mathbb{R}(e_7 + e_8))^\perp \subset \mathbb{R}^8$ op. We vinden dan de wortels $\pm e_k \pm e_\ell$ met $k \neq \ell$ en $k, \ell \leq 5$, en alle $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \mp 1)$ met een even aantal mintekens, en zesde en zevende coördinaat beide tegengesteld aan de laatste coördinaat. In totaal zijn dat $40 + 32 = 72$ wortels.

Definieer $s_8 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1)$. Dit is een wortel, en bovendien eentje die loodrecht staat op elk van r_1, \dots, r_5 . Omdat deze bij een A_5 horen, heeft de ondergroep $\text{Stab}(s_8)$ van W_{E_6} dus $6!$ elementen. Zo volgt

$$\#W_{E_6} = 72 \cdot 6! = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

2 Wortelsystemen

2.1 Definitie en eigenschappen

De wortels bij een diagram A_n, D_n, E_6, E_7 of E_8 corresponderen volgens § 1.6 met een eindige collectie R van vectoren in een inproductruimte. De spiegelingen σ_r bij deze wortels permuteren de verzameling R , en daarom brengen ze een eindige groep voort. We gaan nu meer van dit soort eindige groepen maken door uit te gaan van eindige deelverzamelingen van \mathbb{R}^n met analoge eigenschappen als de reeds behandelde wortels.

We werken steeds in \mathbb{R}^n voorzien van het standaard inproduct. Voor $r \in \mathbb{R}^n$ met $r \neq 0$ wordt de loodrechte spiegeling σ_r in het hyperoppervlak $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, r \rangle = 0\}$ gegeven door $\sigma_r(x) = x - 2 \frac{\langle x, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r$. Merk op dat σ_r en $\sigma_{\lambda r}$ voor $\lambda \neq 0$ dezelfde spiegelingen zijn.

Definitie 2.1.1 1. Een (gereduceerd en irreducibel) *wortelsysteem* in \mathbb{R}^n is een eindige verzameling $r \subset \mathbb{R}^n$ (de elementen ervan noemen we *wortels*) die voldoet aan

- (WS1) $0 \notin R$ en R bevat een basis voor \mathbb{R}^n .
- (WS2) Voor alle $r \in R$ is $\sigma_r(R) \subset R$.
- (WS3) Voor $r, s \in R$ is $\sigma_r(s) - s$ een geheel veelvoud van r .

(WSred) Als $r \in R$ en $\lambda r \in R$, dan $\lambda = \pm 1$.

(WSirr) Er bestaat geen ontbinding $R = R_1 \cup R_2$ met $R_1 \neq \emptyset \neq R_2$ en $\langle r_1, r_2 \rangle = 0$ voor alle $r_1 \in R_1$ en $r_2 \in R_2$.

2. De *Weyl groep* bij een wortelsysteem R is de (eindige) groep $W = W_R := \langle \sigma_r \mid r \in R \rangle$ voortgebracht door alle spiegelingen σ_r .

Opmerkingen 2.1.2 (a) Dat de zo gedefinieerde Weyl groep eindig is, volgt uit het feit dat een $\sigma \in W$ een permutatie op R levert; omdat R een basis van \mathbb{R}^n bevat legt zo'n permutatie de lineaire afbeelding σ vast.

(b) Als R een wortelsysteem is, dan is voor vaste $\lambda \neq 0$ de verzameling $\lambda R := \{\lambda r \mid r \in R\}$ en zelfs $R \cup \lambda R$ dat ook. Maar deze systemen leveren dezelfde Weyl groep als R . Vandaar dat we ons vrijwel altijd beperken tot gereduceerde wortelsystemen, en zelfs zo'n systeem vaak zo schalen dat een kortste vector $r \in R$ de lengte 1 heeft.

(c) Een ontbinding $R = R_1 \cup R_2$ als genoemd in (WSirr) levert een opsplitsing $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ in twee onderling loodrechte lineaire deelruimten. De Weyl groep beeldt deze ruimten V_i binnen zichzelf af, en is het product van de Weyl groepen behorend bij $R_i \subset V_i$. Het levert dus geen serieuze beperking om alleen irreducibele wortelsystemen te behandelen.

(d) De wortels bij A_n, D_n, E_6, E_7 en E_8 leveren voorbeelden van gereduceerde, irreducibele wortelsystemen.

Conventie: een wortelsysteem zullen we in de rest van deze tekst gereduceerd en irreducibel veronderstellen.

Propositie 2.1.3 *De actie op \mathbb{R}^n van de Weyl groep bij een wortelsysteem is irreducibel.*

Bewijs. (Vergelijk dit met het bewijs van Propositie 1.4.1.) Stel $V \neq (0)$ is een lineaire deelruimte die door W binnen zichzelf wordt afgebeeld. Kies $v \neq 0$ in V , en kies een $r \in R$ met $\langle v, r \rangle \neq 0$ (dit kan vanwege (WS1)). Door naar $\sigma_r(v) - v$ te kijken zie je dat $r \in V$. Met hetzelfde argument volgt voor elk rijtje wortels $r_0 = r, r_1, \dots, r_i = s$ met $\langle r_j, r_{j+1} \rangle \neq 0$ voor alle j , dat ook $s \in V$. De verzameling van alle zo verkregen wortels s noemen we R_1 , de collectie resterende wortels R_2 . Er geldt $\langle r_1, r_2 \rangle = 0$ voor alle $r_1 \in R_1$ en $r_2 \in R_2$, dus vanwege (WSirr) is $R_2 = \emptyset$. Er volgt dat $V = \mathbb{R}^n$. \square

2.1.4 De hoek φ met $0 \leq \varphi \leq \pi$ tussen twee wortels r, s wordt bepaald door de formule $\cos \varphi = \frac{\langle r, s \rangle}{\|r\| \|s\|}$. Merk op dat $\sigma_r(s) - s = 2 \frac{\langle r, s \rangle}{\langle r, r \rangle} r \in \mathbb{Z} \cdot r$ vanwege (WS3), dus is

$$n(s, r) := 2 \frac{\langle r, s \rangle}{\langle r, r \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

Evenzo is dan $4 \cos^2 \varphi = n(s, r) \cdot n(r, s) \in \mathbb{Z}$. Op het nog eventueel omwisselen van r en s na levert dit de volgende tabel van mogelijkheden.

$4 \cos^2 \varphi$	$n(s, r)$	$n(r, s)$	φ	lengtes	orde($\sigma_r \sigma_s$)
4	2	2	0	$r = s$	1
4	-2	-2	π	$r = -s$	1
3	3	1	$\pi/6$	$\ s\ = \sqrt{3} \cdot \ r\ $	6
3	-3	-1	$5\pi/6$	$\ s\ = \sqrt{3} \cdot \ r\ $	6
2	2	1	$\pi/4$	$\ s\ = \sqrt{2} \cdot \ r\ $	4
2	-2	-1	$3\pi/4$	$\ s\ = \sqrt{2} \cdot \ r\ $	4
1	1	1	$\pi/3$	$\ s\ = \ r\ $	3
1	-1	-1	$2\pi/3$	$\ s\ = \ r\ $	3
0	0	0	$\pi/2$	(?)	2

Voor het bepalen van de orde van $\sigma_r \sigma_s$ in deze tabel merken we op, dat de afbeelding de identiteit is op de ruimte $\{r, s\}^\perp$, en op het opspansel van r en s is de afbeelding zonder veel moeite uit te rekenen.

Merk op dat bij A_n, D_n, E_6, E_7 en E_8 alle wortels dezelfde lengte hebben, dus daar zijn de mogelijkheden nog beperkter dan ze in principe volgens deze tabel kunnen zijn.

2.2 Diagrammen

Om tot een classificatie van alle mogelijke wortelsystemen te komen, gaan we proberen hetzelfde te doen als voor de al behandelde gevallen. Daar begonnen we met n wortels die een basis vormen, en daar maakten we een graaf bij. Om ook in het algemenere geval zo'n deelverzameling te krijgen wordt het begrip "simpele wortel" ingevoerd.

Definitie 2.2.1 Kies bij een wortelsysteem R een $t \in \mathbb{R}^n$ met $\langle t, r \rangle \neq 0$ voor alle $r \in R$. Dit levert een ontbinding $R = R_t^+ \cup R_t^-$ in *positieve wortels*

$$R_t^+ := \{r \in R \mid \langle r, t \rangle > 0\}$$

en *negatieve wortels* $R_t^- := R \setminus R_t^+ = \{-r \mid r \in R_t^+\}$.

Een $r \in R_t^+$ heet *ontbindbaar* als $r = r_1 + r_2$ met $r_1, r_2 \in R_t^+$, en $r \in R_t^+$ heet *simpel* als r niet ontbindbaar is. De verzameling simpele wortels noteren we als S_t .

Lemma 2.2.2 Voor twee simpele wortels $r \neq s$ geldt $\langle r, s \rangle \leq 0$.

Bewijs. Als zou gelden $\langle r, s \rangle > 0$, dan zouden $n(r, s)$ en $n(s, r)$ beide in $\{1, 2, 3\}$ zitten. Deze getallen kunnen niet allebei 2 zijn want dan zou $r = s$. Dus na eventueel omwisselen van r en s mogen we aannemen $n(r, s) = 1$. Dit betekent dat $\sigma_s(r) = r - s$. Afhankelijk van of $r - s \in R_t^+$ of $s - r \in R_t^+$ is dan $r = (r - s) + s$ of $s = (s - r) + r$ niet simpel. \square

Lemma 2.2.3 De simpele wortels vormen een basis voor \mathbb{R}^n .

Bewijs. (WS1) zegt dat de wortels \mathbb{R}^n opspannen. De positieve wortels doen dat dan ook. Uit de definitie van ontbindbare positieve wortels volgt dat deze een lineaire combinatie van simpele wortels zijn. Dus de simpele wortels spannen \mathbb{R}^n op.

Stel dat er een lineaire relatie is tussen simpele wortels. Deze is te schrijven als $\sum a_i r_i = \sum b_j s_j$, met de r_i, s_j simpele wortels, $r_i \neq s_j$ voor alle i, j en $a_i \geq 0, b_j \geq 0$. Gebruik makend van Lemma 2.2.2 volgt dat $v := \sum a_i r_i = \sum b_j s_j$ voldoet aan $\langle v, v \rangle \leq 0$, en dus $v = 0$. Dit impliceert $0 = \langle v, t \rangle = \sum a_i \langle r_i, t \rangle = \sum b_j \langle s_j, t \rangle$, en daaruit concluderen we dat alle $a_i = b_j = 0$. \square

Propositie 2.2.4 *De Weyl groep bij een wortelsysteem wordt al door de spiegelingen σ_r behorend bij simpele wortels r voortgebracht.*

Bewijs. Zij W^+ de groep voortgebracht door alle σ_r voor r simpel. Merk op dat als $s = \sigma(r)$ voor $\sigma \in W^+$ en r simpel, dan volgt $\sigma_s = \sigma \sigma_r \sigma^{-1} \in W^+$ (vergelijk het bewijs van Propositie 1.3.2(6); in ons geval gebruik je dat spiegelingen orthogonale afbeeldingen zijn). Het volstaat dus, te laten zien dat elke wortel beeld van een simpele wortel is onder een afbeelding uit W^+ . Equivalent hiermee: is r een wortel, dan bestaat er een $\sigma \in W^+$ met $\sigma(r) \in S_t$. Dit is als volgt te zien.

Voor een wortel s noteren we het hyperoppervlak loodrecht op s als V_s . Omdat R gereduceerd is, geldt $V_s = V_{s'}$ precies dan als $s = \pm s'$.

Er zijn maar eindig veel wortels en dus ook maar eindig veel zulke hyperoppervlakken, dus bestaat $\tilde{t} \in V_r$ met $\tilde{t} \notin V_s$ voor alle wortels $s \neq \pm r$. Dit houdt in dat $\langle \tilde{t}, \pm r \rangle = 0$ en $\langle \tilde{t}, s \rangle \neq 0$ voor alle wortels $s \neq \pm r$. Door t' voldoende dicht bij \tilde{t} in de juiste richting te kiezen vind je dat $|\langle t', s \rangle| > \langle t', r \rangle > 0$ (dus in het bijzonder nog steeds $\langle t', s \rangle \neq 0$) voor alle $s \neq \pm r$.

Deze t' kan nu gebruikt worden om positieve wortels $R_{t'}^+$ en simpele wortels $S_{t'}$ te definiëren. Er geldt dat $r \in S_{t'}$, want $r = s_1 + s_2$ met de $s_i \in R_{t'}^+$ zou impliceren dat $\langle r, t' \rangle = \sum_i \langle s_i, t' \rangle = \sum_i |\langle s_i, t' \rangle|$, in tegenspraak met de keuze van t' .

Kies $\sigma \in W^+$ zo dat $\langle \sigma(t'), s \rangle \geq 0$ voor alle $s \in S_t$; dit kan vanwege Opgave 20. Omdat $\langle \sigma(t'), s \rangle = \langle t', \sigma^{-1}(s) \rangle \neq 0$ voor alle wortels s , levert $\sigma(t')$ precies dezelfde collectie positieve wortels als de oorspronkelijke t . Derhalve is ook $S_t = S_{\sigma(t')} = \sigma(S_{t'})$ en dus $\sigma(r) \in S_t$. \square

Voor $r \neq s$ simpele wortels geldt $n(r, s) \in \{-3, -2, -1, 0\}$. De hoek tussen twee zulke wortels is af te lezen uit het product $n(r, s)n(s, r)$; deze is $\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4$ of $5\pi/6$. We gaan deze informatie weergeven door een graaf.

Definitie 2.2.5 Gegeven een wortelsysteem R met verzameling simpele wortels S_t . Door eventueel alles met een factor λ te vermenigvuldigen mogen we aannemen dat de lengte van de kortste vector in S_t gelijk aan 1 is.

Het *Dynkin diagram* bij R bestaat uit een graaf plus aanvullende informatie, als volgt. Voor elke $r \in S_t$ nemen we een punt, en bij dat punt schrijven we het getal $\langle r, r \rangle$.

Voor elk paar $r \neq s$ in S_t met $\langle r, s \rangle \neq 0$ nemen we een kant tussen de bijbehorende punten, en bij die kant schrijven we het getal $m(r, s) := n(r, s)n(s, r) \in \{1, 2, 3\}$.

Verder wordt algemeen de conventie gebruikt, dat het getal 1 bij een punt of kant niet wordt genoteerd.

Propositie 2.2.6 *Het Dynkin diagram bij een wortelsysteem is als graaf samenhangend.*

Bewijs. Indien niet, dan zouden alle simpele wortels behorend bij een samenhangscomponent loodrecht staan op die bij een andere component. Dit zou impliceren dat de Weyl groep niet

irreducibel werkt op \mathbb{R}^n , want het opspansel van de vectoren bij zo'n samenhangscomponent wordt op zichzelf afgebeeld. \square

Opmerking 2.2.7 Uit het Dynkin diagram is het inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ weer af te lezen. Immers, dit wordt volledig bepaald door de inproducten $\langle r_i, r_j \rangle$ waar de r_i de gegeven basis van simpele wortels doorlopen. Als $i = j$ heeft dit de waarde gelijk aan het getal bij punt i van de graaf. Als $i \neq j$ dan is $\langle r_i, r_j \rangle^2 = \frac{1}{2}m(r_i, r_j) \cdot \langle r_i, r_i \rangle \cdot \langle r_j, r_j \rangle$ (het product van de getallen bij de punten i en j en bij de kant $\{i, j\}$). Dit bepaalt $\langle r_i, r_j \rangle$ omdat we ook weten dat het ≤ 0 is. Voor een vector $v = \sum a_r r$ (som over de simpele wortels r) is dus $\langle v, v \rangle$ gelijk aan de som met als termen $a_r^2 \cdot \langle r, r \rangle$ plus voor elk paar $\{r, s\}$ met $r \neq s$ een term $-a_r a_s \sqrt{\langle r, r \rangle \langle s, s \rangle m(r, s)}$.

2.3 Classificatie en voorbeelden

Om alle (gereduceerde en irreducibele) wortelsystemen in \mathbb{R}^n te vinden zullen we eerst alle grafen bepalen met getallen op de punten en kanten, waarvoor de bilineaire vorm die dit definieert op \mathbb{R}^n inderdaad positief definit is.

Als eerste stap vervangen we elke $r \in S_t$ door $r/\|r\|$. Op deze manier raken we de getallen bij de punten van de graaf kwijt: als $v = \sum b_r r/\|r\|$, dan is

$$\langle v, v \rangle = \sum_r b_r^2 - \sum_{\{r,s\}} b_r b_s \sqrt{m(r, s)}.$$

Alle grafen bepalen met getallen $m(r, s) \in \{0, 1, 2, 3\}$ waarvoor dit positief definit is, gaat op vrijwel dezelfde manier als we dat al eerder voor het geval met alle $m(r, s) \in \{0, 1\}$ hebben gedaan.

Dezelfde argumenten als in § 1.5 tonen aan dat er geen cykels mogen voorkomen, en dat er geen punten zijn waar ≥ 4 kanten samenkomen. We mogen en zullen verder aannemen dat er een kant is met $m(r, s) \geq 2$, want de resterende gevallen zijn al behandeld.

Lemma 2.3.1 In een Dynkin diagram komen niet zowel een punt op minstens drie kanten als een kant met een getal ≥ 2 voor.

Bewijs. Neem de vector met coefficient a in het punt op minstens drie kanten, coefficient b direct ernaast op één tak, idem coefficient c op een andere tak, allemaal a 's op de derde tak tot aan een kant met $m = m(r, s) \geq 2$, en een d net voorbij die kant. De kwadratische vorm heeft hierbij een waarde $\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - \sqrt{mad} = (b - a/2)^2 + (c - a/2)^2 + (d - \sqrt{ma}/2)^2 + (2 - m)a^2/4$, en dat wordt ≤ 0 voor zekere vectoren $\neq 0$. \square

Dit beperkt de mogelijkheden al tot een rij punten $1, 2, \dots, n$ met steeds één kant tussen i en $i + 1$. Ga zelf na:

Lemma 2.3.2 In een Dynkin diagram met punten $1, \dots, n$ en kanten tussen alle i en $i + 1$:

- (a) komt een getal ≥ 2 hoogstens een keer bij een kant voor.
- (b) komt een getal 3 bij een kant niet voor als $n \geq 3$.

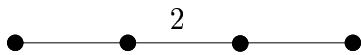
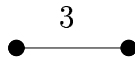
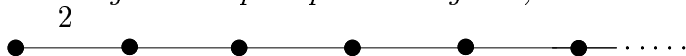
(c) komt een getal ≥ 4 niet voor bij een kant (dat wisten we al, maar je kan het ook inzien door naar positief definitief zijn te vragen).

(d) komt een getal 2 bij een kant $\neq \{1, 2\}$ en $\neq \{n-1, n\}$ niet voor als $n \geq 5$.

(Voor (d): schrijf, gerekend vanaf de kant met een getal 2, in één richting de coördinaten $a, 2b, b$ en in de andere richting $2c, c$ en verder nullen. De zo verkregen uitdrukking is niet positief definitief.)

Uit dit lemma volgt direct:

Propositie 2.3.3 *Elk Dynkin diagram met tenminste één kant voorzien van een getal ≥ 2 , zonder getallen op de punten te geven, komt voor in de volgende lijst:*



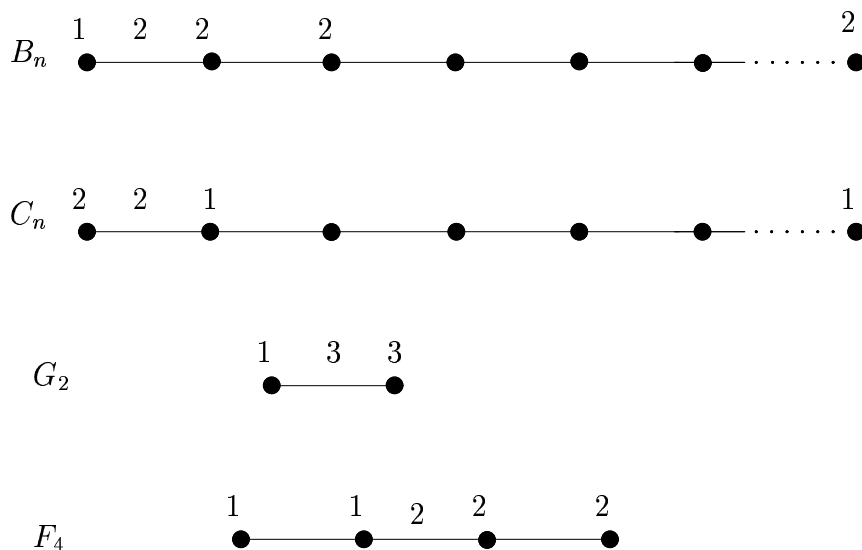
□

We hoeven nu alleen nog te kijken of het mogelijk is, getallen op de punten te zetten zo dat deze grafen ook werkelijk grafen bij een wortelsysteem zijn.

Lemma 2.3.4 Als $r \neq \pm s$ wortels zijn met $m(r, s) = m$ en $\|r\| \geq \|s\|$, dan is $\langle r, r \rangle = m \langle s, s \rangle$. In een (gereduceerd en irreducibel) wortelsysteem komen hoogstens twee verschillende lengten van wortels voor.

Bewijs. De eerste bewering is af te lezen uit de tabel in § 2.1.4. Voor de tweede, merk op dat de uitspraak juist is voor simpele wortels, en de overige zijn daar beelden van onder de Weyl groep; deze transformaties veranderen de lengte niet. □

Stelling 2.3.5 *De complete lijst van Dynkin diagrammen bij gereduceerde en irreducibele wortelroosters bestaat behalve uit A_n, D_n, E_6, E_7 en E_8 uit de volgende grafen:*



Bewijs. Dat dit alle mogelijke grafen zijn hebben we al beredeneerd. Door ergens bij een punt een getal 1 te zetten, volgt met Lemma 2.3.4 bovenstaande lijst. We moeten dan tenslotte nog aantonen dat er bij deze grafen ook echt wortelsystemen horen. Dat doen we in de volgende lijst voorbeelden. \square

Voorbeeld 2.3.6 B_n en C_n .

Voor B_n kiezen we in \mathbb{R}^n de vectoren

$$r_1 = e_1, r_2 = e_1 - e_2, r_3 = e_2 - e_3, \dots, r_n = e_{n-1} - e_n.$$

Deze hebben de juiste inproducten en vormen een basis voor \mathbb{R}^n . De spiegelingen $\sigma_i := \sigma_{r_i}$ worden als volgt beschreven. Er geldt $\sigma_1(e_j) = e_j$ voor $j \geq 2$ en $\sigma_1(e_1) = -e_1$. Voor $i \geq 2$ is σ_i de buurverwisseling van e_i en e_{i-1} .

Zo is in te zien dat het wortelsysteem bestaat uit alle vectoren $\pm e_i$ en $\pm e_k \pm e_\ell$ (met $k \neq \ell$). Dat zijn er in totaal $2n^2$.

De Weyl groep bestaat uit alle combinaties van tekenwisselingen en permutaties op de standaard basisvectoren. Deze heeft dus $2^n \cdot n!$ elementen.

Door in dit voorbeeld r_1 met $\sqrt{2}$ te vermenigvuldigen en de overige r_i door $\sqrt{2}$ te delen, ontstaat C_n . Deze verandering heeft geen invloed op de Weyl groep, en evenmin op het aantal wortels.

Voorbeeld 2.3.7 G_2 .

Neem $r_1 = (1, 0)$ en $r_2 = (-3/2, \sqrt{3}/2)$ in \mathbb{R}^2 .

De Weyl groep wordt voortgebracht door σ_{r_1} en door $\sigma_{r_1}\sigma_{r_2}$; deze laatste afbeelding is een spiegeling over 60 graden.

Zo vinden we voor de Weyl groep de diedergroep D_6 (symmetriegroep van de regelmatige zeshoek) met 12 elementen, en we vinden ook 12 wortels (precies de elementen met norm ≤ 3 in $\mathbb{Z}[(-1 + \sqrt{-3})/2] \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$).

Voorbeeld 2.3.8 F_4 .

De vectoren

$$r_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4), \quad r_2 = e_4, \quad r_3 = e_3 - e_4 \quad \text{en} \quad r_4 = e_2 - e_3$$

in \mathbb{R}^4 hebben de goede lengten en waarden $n(r_i, r_j)$.

Met wat gepuzzel volgt dat R bestaat uit alle $\pm e_i$ en alle $\pm e_k \pm e_\ell$ (voor $k \neq \ell$) en alle $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. In totaal zijn dit $8 + 24 + 16 = 48$ wortels, de helft met lengte 1 en de andere helft met lengte 2.

De orde van de Weyl groep laat zich bijvoorbeeld met de bij E_8 genoemde stelling van Witt bepalen. Neem namelijk de wortel e_1 . De baan hiervan onder W bestaat uit alle 24 wortels van lengte 1. En de stabilisator is $\langle \sigma_{r_2}, \sigma_{r_3}, \sigma_{r_4} \rangle$, precies de Weil groep van B_3 . Dit impliceert

$$\#W_{F_4} = 24 \cdot \#W_{B_3} = 2^7 \cdot 3^2 = 1152.$$

2.3.9 We bewijzen tenslotte een resultaat over het *wortelrooster* bij een Dynkin diagram.

Definitie 2.3.10 Het *wortelrooster* Λ_R bij een wortelsysteem $R \subset \mathbb{R}^n$ bestaat per definitie uit alle lineaire combinaties met gehele coëfficiënten van de elementen van R .

Dit wortelrooster is inderdaad een *rooster*; dat wil zeggen het is een groep ten opzichte van de optelling van vectoren, het bevat een basis voor \mathbb{R}^n en elke begrensde verzameling in \mathbb{R}^n bevat slecht eindig veel elementen van het wortelrooster.

Propositie 2.3.11 *Zij R een wortelsysteem van type A_n, D_n, E_6, E_7 of E_8 . We schalen dit zo, dat alle wortels inproduct 2 met zichzelf hebben. Het bijbehorende wortelrooster noteren we als Λ .*

Dan geldt dat $R = \{v \in \Lambda \mid \langle v, v \rangle = 2\}$.

Bewijs. Schrijf $\tilde{R} = \{v \in \Lambda \mid \langle v, v \rangle = 2\}$. Er geldt $R \subset \tilde{R}$, vanwege Propositie 1.3.2. We hoeven dus alleen nog de andere inclusie te bewijzen. Dit gaat als volgt. Merk op, dat \tilde{R} een wortelsysteem is. Dit wortelsysteem is bovendien gereduceerd, want alle elementen hebben dezelfde lengte. Bovendien is \tilde{R} irreducibel. Immers, als $\tilde{R} = R_1 \cup R_2$ met $R_1 \perp R_2$, dan zou dit ook een opdeling van $R \subset \tilde{R}$ opleveren. Dan moet wel $R \subset R_1$ of $R \subset R_2$, omdat R een irreducibel wortelsysteem is. Maar $R^\perp = (0)$, dus er zou volgen dat ofwel R_1 ofwel R_2 de lege verzameling is.

Neem nu een verzameling simpele wortels in \tilde{R} en maak het bijbehorende Dynkin diagram. Dit is ook weer een diagram van type A_n, D_n, E_6, E_7 of E_8 , want alle wortels hebben dezelfde lengte. Bovendien bevat het een zelfde soort wortelsysteem. Hieruit volgt de gevraagde gelijkheid. \square

Voorbeeld 2.3.12 De vectoren met lengte $\sqrt{2}$ in het wortelrooster bij A_n corresponderen met de rijtjes gehele getallen (a_1, \dots, a_n) die voldoen aan

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3 - \dots - a_{n-1} a_n = 1.$$

Uit Propositie 2.3.11 volgt dat het aantal oplossingen precies het aantal wortels bij A_n is, en dat is $n(n+1)$. Ook zonder deze propositie is dit aantal wel te vinden, bijvoorbeeld door de vergelijking te herschrijven als

$$a_1^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2 + a_n^2 = 2.$$

Controleer zelf dat deze inderdaad precies $n(n+1)$ gehele oplossingen heeft.

3 Opgaven

1. Zij K_n de volle graaf, dat wil zeggen de graaf bestaande uit n punten en precies één kant tussen ieder tweetal $i \neq j$ daarvan. Beantwoordt Vraag 1.1.4 voor K_n .
2. Stel dat de graaf Σ (zonder lusjes) een eindige vereniging is van disjuncte samenhangende grafen Σ_i . Ga na dat Vraag 1.1.4 geldt voor Σ precies dan als het geldt voor een van de Σ_i , terwijl voor alle andere de zwakkere vorm geldt waarbij niet ergens ook ongelijkheid wordt geeist. Hoe zit dat met Vraag 1.2.2?
3. Laat zien dat, hoewel er oneindig veel samenhangende grafen met n punten zijn, er toch slechts eindig veel kunnen zijn waarvoor Vraag 1.2.2 geldt.

Een sterkere vorm hiervan: toon aan dat een graaf met n punten waarvoor Vraag 1.2.2 geldt, hoogstens $n-1$ kanten heeft.

4. Bewijs dat als Vraag 1.2.2 geldt voor Σ , dan ook voor elke deelgraaf (= een graaf die je uit Σ krijgt door een aantal punten en alle kanten daarheen weg te halen).
5. Bij de samenhangende graaf Σ die twee punten $i \neq j$ bevat met precies één kant ertussen, maken we $\bar{\Sigma}$ door de kant tussen i en j te verwijderen en vervolgens i en j te identificeren. Ga na dat als Vraag 1.2.2 voor Σ geldt, dan ook voor $\bar{\Sigma}$. (Met dit gegeven kan je alternatieve bewijzen maken voor een aantal lemma's uit §1.4)
Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de omkering niet geldt.

6. Bepaal direct uit de definities de Weyl groep en de verzameling wortels van A_2 , dat is de graaf met twee punten en een kant ertussen.
7. Laat zien dat uitgaande van een graaf, als r en λr beide wortels zijn dan volgt $\lambda = \pm 1$, en ook $\sigma_r = \sigma_{-\lambda r}$.
8. Gegeven een graaf Σ met q_Σ positief definit. Wanneer geldt dat $\sigma_r \sigma_s = \sigma_s \sigma_r$ voor wortels r, s ?

Bepaal ook de orde van $\sigma_r \sigma_s$.

9. Neem een graaf bestaande uit 2 punten met $n \geq 1$ kanten ertussen. Ga na of de actie van de Weyl groep irreducibel is. Wat kan je zeggen over de Weyl groep als ondergroep van $SL(2, \mathbb{Z})$?

10. (a) Laat zien dat als de Cartan matrix C van een samenhangende graaf inverteerbaar is, dan werkt de Weyl groep irreducibel. (Imiteer bijvoorbeeld het bewijs van Lemma 1.4.1)
- (b) Omgekeerd, is $v \neq 0$ een vector met $Cv = 0$, dan geldt $\sigma(v) = v$ voor elke σ in de Weyl groep, dus als de graaf uit minstens twee punten bestaat is in dit geval de actie van de Weyl niet irreducibel.
11. Toon aan dat als de Cartan matrix bij een graaf inverteerbaar is, dan bestaat het centrum van de Weyl groep uit hoogstens twee elementen. (Het centrum van een groep G bestaat uit alle $h \in G$ met $hg = gh$ voor elke $g \in G$).
- Probeer het centrum te bepalen voor een aantal van de gevallen A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .
12. Bepaal alle grafen bestaande uit 3 punten waarvoor geldt dat de bijbehorende Weyl groep *niet* irreducibel werkt op \mathbb{R}^3 .
13. Bewijs de stelling van Witt (1.6.4) voor het speciale geval van A_n . Hoe groot is de stabilisator in zo'n geval, en hoeveel beelden heeft de genomen vector s_i onder de actie van W ?
14. Onderzoek in welke gevallen men voor de vector s_i in Stelling 1.6.4 een *wortel* kan nemen.
- Wat kan je in zo'n geval zeggen over de groep $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{s_i}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n \rangle$?
- Ga na dat als r_i wordt vervangen door de wortel s_i , dan blijft in ieder geval onafhankelijkheid van de n gegeven vectoren over. Wat gebeurt er met het Dynkin diagram?
15. Ga na dat in het voorbeeld over E_8 inderdaad alle $\pm e_k \pm e_\ell$ wortels zijn.
16. Beschrijf een element van orde 7 en ook een van orde 8 in de Weyl groep van E_8 .
17. Maak een schets van elk van de gereduceerde, irreducibele wortelsystemen in \mathbb{R}^2 . (Dat zijn A_2, B_2 en G_2 .)
18. Bewijs de bewering over de ordes van $\sigma_r \sigma_t$ in de tabel van § 2.1.4.
19. Ga na dat elk element van een wortelsysteem te schrijven is als een combinatie $\sum a_s s$ van simpele wortels, waarbij ofwel alle $a_s \geq 0$ zijn, ofwel alle $a_s \leq 0$.
20. Maak bij een wortelsysteem met simpele wortels S_t de "kamer" $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, r \rangle \geq 0 \text{ voor alle } r \in S_t\}$. Ga na dat elke $v \in \mathbb{R}^n$ door een product van spiegelingen bij de simpele wortels binnen C is af te beelden. (Idee: er geldt $t \in C$; neem de vector $w = \sigma(v)$ met σ een product van de genoemde spiegelingen, waarvoor de afstand tot t minimaal is, en ga na dat $w \in C$.)
21. Bewijs dat de groep voortgebracht door de spiegelingen bij de simpele wortels irreducibel werkt op \mathbb{R}^n .
22. Geef een bewijs van Lemma 2.3.2.

23. Gebruik eenzelfde argument als in het bewijs van Propositie 2.2.4 om te bewijzen dat als S_t en $S_{t'}$ de simpele wortels zijn uitgaande van een vector t respectievelijk t' , dan is er een element van de Weyl groep dat S_t op $S_{t'}$ afbeeldt. Laat zien dat hieruit volgt dat het Dynkin diagram bij een wortelsysteem niet van de keuze van de vector t afhangt.
24. Het voorbeeld van F_4 heeft te maken met het volgende. Begin met de quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}k$ met $ij = -ji = k$ en $jk = -kj = i$ en $ki = -ik = j$ en $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Bij een $x \in \mathbb{H}$ hebben we z'n geconjugeerde \bar{x} die de coefficient van i, j en k van teken wisselt. Verder hebben we het spoor $S(x) = x + \bar{x}$ en de norm $N(x) = x\bar{x}$, beide rationale getallen.
- Ga na dat de quaternionen x waarvoor geldt dat $N(x) \in \mathbb{Z}$ en bovendien $S(x), S(ix), S(jx), S(kx) \in \mathbb{Z}$ een ring vormen.
- Bepaal de eenheden en elementen van norm 2 in deze ring. Zie je een verband met F_4 ?
25. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $q_\Sigma(v) = 1$ met Σ het Dynkin diagram D_n en v in het bijbehorende wortelrooster? Probeer deze vergelijking ook zonder de hier behandelde theorie op te lossen.