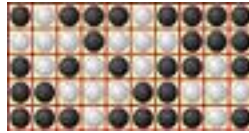


# FLIPIT

JAAP TOP



Een netwerk bestaat uit een eindig aantal punten, waarbij voor elk tweetal ervan gegeven is of er wel of niet een verbinding is tussen deze twee. De punten waarmee een gegeven punt van het netwerk is verbonden heten de burens van dit punt. Je kan een netwerk dus weergeven door middel van een plaatje waarin de punten worden weergegeven, en waarin lijntjes zijn getekend tussen de tweetallen die verbonden zijn. Praktische toepassingen van netwerken zijn er overal: denk aan systemen van gekoppelde sensoren, computernetwerken, telecommunicatie en nog heel veel meer. In zo'n toepassing kan een punt van een netwerk iets vrij ingewikkelds zijn: een processor, een rookdetector, een telefoon, een internet site. In dit artikel houden we het eenvoudiger: een punt in ons netwerk zal maar één eigenschap hebben, hij is ofwel wit, ofwel zwart.

We beginnen met een netwerk waarin ieder punt wit is. Vervolgens willen we de kleur veranderen door een aantal punten van het netwerk aan te wijzen. Daarbij geldt als enige regel: als we een punt aanwijzen, dan verandert zowel dit punt, als ook al zijn burens, van kleur. Het spelletje FlipIt, dat je in allerlei varianten op mobiele telefoons en als computerspel vindt, is hierop gebaseerd.

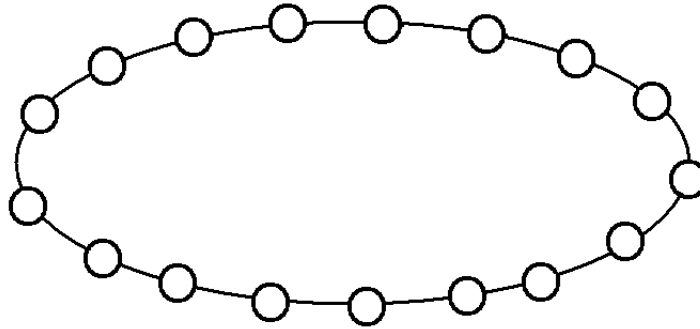
Eerst maar een voorbeeld: neem een netwerk bestaande uit een rijtje (witte) punten.



Wijzen we de tweede punt van de rij aan, dan worden de eerste drie zwart. Vervolgens ook de vijfde, dan zijn al de eerste zes punten zwart. Is het totaal aantal punten in de rij een veelvoud van 3, dan kunnen we door zo door te gaan ervoor zorgen dat inderdaad alle punten zwart worden. Dat lukt ook voor rijen van een andere lengte: voor  $3n + 2$

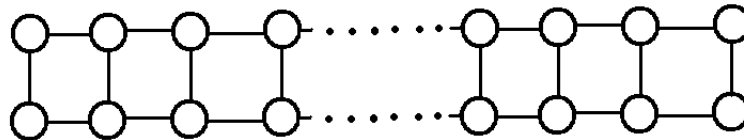
punten wijs je eerst de meest linkse aan, en dan blijft een rij bestaande uit precies  $3n$  witte punten over; hiervoor weten we al hoe we alles zwart kunnen maken. En voor een rij bestaande uit  $3n + 1$  punten wijzen we zowel de meest linkse als de meest rechtse aan. Hierna blijft middenin een rij bestaande uit  $3(n - 1)$  punten over, en die konden we al.

Als tweede voorbeeld nemen we een kring van punten:

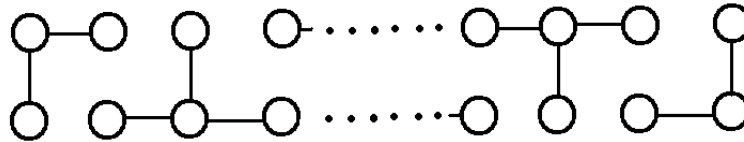


Ook in dit geval lukt het, alle punten van kleur te flippen. Immers, wijs gewoon alle punten aan. Omdat ieder punt in dit geval precies twee burens heeft, verandert hij nu in totaal drie keer van kleur (namelijk, als hij zelf aangewezen wordt, en als de ene buur wordt aangewezen, en tenslotte als de andere aan de beurt is). De witte punt wordt bij dit alles eerst zwart, dan weer wit, en tenslotte opnieuw zwart.

Je gaat je na dit succes afvragen of ieder netwerk geheel kan flippen. Het antwoord is: JA! Dat is gemakkelijk gezegd, maar een bewijs ervoor vergt nog wel wat werk. Voordat we hieraan beginnen, nog een laatste speciale geval. De  $2 \times n$  rechthoek:



Is  $n$  oneven, dan vatten we dit op als vereniging van een L-vormig netwerkje aan de ene kant, vervolgens een aantal T-vormige netwerkjes (beurtelings recht of omgedraaid), en aan het andere eind nog een L-vorm (recht of ondersteboven, afhankelijk van  $n \bmod 4$ ).



Door in ieder van deze mini-netwerkjes de centrale punt aan te wijzen flipt het hele netwerk.

**Opgave:** probeer zelf te bedenken, hoe je voor een even getal  $n$  dit geval doet!

Om FlipIt op een rechthoek te spelen, kan je op diverse internet sites terecht. Bijvoorbeeld

<http://www.tablajatekos.hu/00004/flipit.html>

waar je elk  $n \times m$  bord met  $3 \leq n, m \leq 10$  kan kiezen. Je komt het spel op een rechthoek ook wel tegen onder de naam 'fiver': het aanwijzen van een punt dat niet op de rand ligt, zorgt er immers bij een rechthoek voor dat er precies vijf punten van kleur veranderen.

**Flip It!**  
(Mindet fehérre!)

Ha még nem láttál ilyent, akkor állítsd  $2 \times 3$ -ra..., ez kettő kattintással megoldható. (A rákattintott és az oldalszomszédjai váltanak át.)

A  $2 \times 2$ -es négy kattintásos..., aztán persze a nagyobbaknál: már lehet spekulálni is.

© copyright 2003, Novel Games. All rights reserved.

Met een beetje lineaire algebra gaan we nu uitleggen waarom ieder netwerk geheel van kleur kan veranderen. Met  $\mathbb{F}$  geven we de verzameling bestaande uit 0 en 1 aan. We definiëren een optelling en een vermenigvuldiging op  $\mathbb{F}$ , vrijwel op de gebruikelijke manier ( $0 + 1 = 1$ ,  $1 * 1 = 1$  enzovoort) maar met één uitzondering: we definiëren  $1 + 1 = 0$ . Net als in de lineaire algebra colleges, is verder  $\mathbb{F}^n$  de verzameling rijtjes  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  waarin elke  $a_i$  uit  $\mathbb{F}$  komt. Op  $\mathbb{F}^n$  hebben we een

soort ‘inproduct’: is  $a = (a_1, \dots, a_n)$  en  $b = (b_1, \dots, b_n)$  dan

$$a \cdot b := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Dit is geen echt inproduct zoals in de gebruikelijke lineaire algebra, want bijvoorbeeld is bij ons  $(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1) = 0$  terwijl gewoonlijk uit zo’n inproduct met zichzelf het kwadraat van de lengte van de vector komt. Toch zijn veel eigenschappen direct over te dragen naar deze situatie. Bijvoorbeeld geldt: als  $a \cdot b = 0$  voor elke  $b$  in  $\mathbb{F}^n$ , dan volgt  $a = (0, 0, \dots, 0)$ . Dit zie je gemakkelijk door voor  $b$  de standaardbasisvectoren in te vullen. Is  $V$  een lineaire deelruimte van  $\mathbb{F}^n$ , dan noteren we

$$V^\perp := \text{alle } w \text{ in } \mathbb{F}^n \text{ met } w \cdot v = 0 \text{ voor elke } v \text{ uit } V.$$

Dit is zelf ook een lineaire deelruimte van  $\mathbb{F}^n$ , en er geldt

$$V_1 \subset V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V_1^\perp \supset V_2^\perp$$

zoals net als in het standaard geval is na te gaan.

Om deze wiskunde met onze netwerken te verbinden, nummeren we de punten in zo’n netwerk:  $1, 2, 3, \dots, n$ . De kleuren wit/zwart die we gebruiken, geven we weer door de getallen 0 en 1 uit  $\mathbb{F}$ . Een toestand van het netwerk is nu hetzelfde als een vector  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , waarbij  $a_i = 0$  als de  $i$ -de punt wit is, en  $a_i = 1$  als de  $i$ -de punt zwart is. Ook de collectie punten die we aanwijzen om samen met hun burens van kleur te gaan flippen, geven we aan door een vector uit  $\mathbb{F}^n$ . Het flippen zelf is (in  $\mathbb{F}$ ) de bewerking  $x \mapsto x + 1$ , immers die beeldt 0 op 1 af, en 1 op  $1 + 1 = 0$ . Het effect van het aanwijzen van een aantal punten is dus, dat er bij de toestandsvector een zekere ‘translatievector’ wordt opgeteld. Met andere woorden, de hele puzzel wordt beschreven door een afbeelding, die aan alle mogelijke aanwijsvectoren, de bijbehorende translatievectoren toevoegt.

Een voorbeeld hierbij: als netwerk nemen we weer het rijtje, zeg, met  $n = 5$ . We nummeren de punten van links naar rechts. Het aanwijzen van het meest linkse plus het derde punt wordt gegeven door de aanwijsvector  $(1, 0, 1, 0, 0)$ . Het effect hiervan op het netwerk is de translatievector  $(1, 0, 1, 1, 0)$ . Aanwijsvector  $(1, 0, 0, 1, 0)$  levert de translatie over  $(1, 1, 1, 1, 1)$ , dus die flipt het hele netwerk naar de andere kleur.

De afbeelding

$$\text{aanwijsvector} \mapsto \text{translatievector}$$

is een lineaire afbeelding, en wordt dus gegeven door een  $n \times n$  matrix  $A = (a_{i,j})$ . De kolom bestaande uit  $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$  hierin, is het beeld

van de  $j$ -de standaard basisvector. Per definitie heeft dit beeld op de  $i$ -de plek een 1, precies dan als  $i = j$  of als  $i$  en  $j$  buren zijn. Oftewel:

$$a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow i = j \text{ of } i \text{ en } j \text{ zijn buren.}$$

Hieruit volgt in het bijzonder, dat de matrix  $A$  symmetrisch is, en dat op de diagonaal van  $A$  allemaal enen staan.

Wij willen bewijzen, dat er een aanwijsvector  $a$  bestaat, die als effect heeft dat *elk* punt van het netwerk flipt. Dat houdt in, dat de translatievector bij deze  $a$  de vector  $e := (1, 1, 1, \dots, 1)$  (geen enkele nul) moet zijn. Kortom, we zoeken een oplossing  $x$  van  $Ax = e$ . Waarom zou het zo zijn, dat die vector  $e$  in het beeld zit van  $A$ ? Schrijf  $B$  voor de collectie beeldvectoren. Laten zien dat  $e$  hiertoe behoort, is equivalent met laten zien dat  $B^\perp \subset e^\perp$ . Omdat  $A$  symmetrisch is, geldt  $B^\perp = \text{Ker}(A)$ . Immers, beide lineaire deelruimten van  $\mathbb{F}^n$  hebben dezelfde dimensie  $n - \dim B$ , en zit een vector  $a$  in  $\text{Ker}(A)$ , dan  $Aa = 0$  en dus

$$a \cdot Ab = Aa \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

voor elke vector  $b$ , oftewel  $a$  staat loodrecht op elke vector in  $B$  en zit dus in  $B^\perp$ .

Ons probleem is nu, te laten zien dat  $\text{Ker}(A) \subset e^\perp$ . Door opnieuw over te gaan op alles wat er loodrecht op staat, hoeven we alleen aan te tonen dat  $e$  in  $\text{Ker}(A)^\perp$  zit, oftewel dat  $e \cdot c = 0$  voor elke  $c$  met  $Ac = 0$ . Hiervoor gebruiken we een kleine berekening. Is  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , dan

$$d \cdot Ad = \sum_{j=1}^n a_{j,j}d_j^2 + \sum_{i < j} (a_{i,j} + a_{j,i})d_i d_j = \sum_{j=1}^n d_j + 0 = e \cdot d.$$

Vullen we voor  $d$  een  $c$  in die aan  $Ac = 0$  voldoet, dan geldt dus

$$e \cdot c = c \cdot Ac = c \cdot 0 = 0.$$

Dus inderdaad staat  $e$  loodrecht op de kern van  $A$ , en daarmee volgt dat  $e$  in het beeld van  $A$  zit.

Hoewel dit argument laat zien dat inderdaad voor ieder netwerk de opdracht ‘flip alle punten’ op te lossen is, geeft de redenering je geen expliciete oplossing. Het enige wat je weet, is dat zo’n oplossing gevonden wordt door het stelsel  $Ax = e$  op te lossen. Voor netwerken met veel punten is dit een hele klus. Gelukkig bestaan in de numerieke wiskunde methoden waarmee dit handig aan te pakken is. Met name de methode met de fraaie naam ‘Block Lanczos’ blijkt uitermate geschikt voor ons soort lineaire stelsels over  $\mathbb{F}$ , hoewel de methode oorspronkelijk voor gewone reële getallen was ontwikkeld. Met hetzelfde bewijs als we hier

gaven, zie je overigens dat voor *elke* symmetrische matrix over  $\mathbb{F}$  de diagonaal in het beeld van de matrix zit.