



Analyse achter de doorbraak van een dam

Marije Bakker





Analyse achter de doorbraak van een dam

Marije Bakker

Begeleider:
A.E.P. Veldman
Rijksuniversiteit Groningen
Instituut voor Wiskunde en Informatica
Postbus 800
9700 AV Groningen

Juli 2007

Samenvatting

In dit onderzoek wordt er gekeken naar het zogenaamde *dambreak*-probleem. Uitgaande van een dam op $x = 0$ en water op het interval $-\infty < x \leq 0$ en een droge bodem op $0 < x < \infty$ wordt onderzocht hoe de analyse van dit probleem luidt als de dam op het tijdstip $t = 0$ wordt weggehaald zonder dat er tijd verstrijkt. Gekeken wordt welke formule de hoogte $h(x, t)$ op elke plaats x en elk tijdstip t beschrijft. Verder wordt ook onderzocht in hoeverre deze formule strookt met experimenten, hoe deze er in simulaties uitziet en wat er verandert als er voor de damdoorbraak ook een laagje water op $0 < x < \infty$ staat.

Abstract

In this paper we will look at the so-called dam break problem. We base ourselves on the assumption that a dam is located on $x = 0$ at $t < 0$. Also it will be assumed that there is only water on the interval $-\infty < x \leq 0$. At $t = 0$ the dam is removed immediately, without any time passing. We aim at finding a formula that describes the height $h(x, t)$ at each position x and every time t . We also will investigate whether or not this formula is compatible with experimental results, how it looks in simulations and what the changes are if we assume water on both sides of the dam before breaking.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
2	Plan van aanpak	7
2.1	Probleemstelling	7
2.2	Methode	9
3	Mathematisch model	11
3.1	Analyse	11
4	Model: aan beide kanten van de dam staat water	17
5	Terugkoppeling natuurkunde	21
5.1	Aannames	21
5.2	Glad vrij oppervlak	22
6	Terugkoppeling experimenten	25
6.1	Experiment met beginhoogte $a = 0.05715(m)$	25
6.2	Experiment met beginhoogte $a = 0.1143(m)$	26
7	Terugkoppeling simulaties met Savof'96	29
7.1	Vergelijking simulatie en experiment	29
7.2	Vergelijking simulatie Savof'96 en simulatie hoogtesim	30
8	Discussie	33
	Referenties	35
	Boeken en artikelen	35
	Internetpagina's	35
	Programma's	36
A	Behoudswetten	37
A.1	Wet van behoud van massa	37
A.2	Wet van behoud van impuls	38
B	Transformeren en diagonaliseren	41
C	Getal van Froude	43

D MATLAB-programma: hoogtesim.m**45**

Hoofdstuk 1

Inleiding

”Water is van levensbelang.” Deze zin wordt nog weleens gebruikt in reclames voor bronwater en in campagnes ten bate van schoon drinkwater in ontwikkelingslanden. En dit is niet voor niets, want geen mens kan zonder water. Maar hoewel water een eerste levensbehoefte is, kan water soms ook werken als een allesvernietigende kracht. Voorbeelden hiervan zijn de waternoodsramp in Zeeland in 1953 en de teloorgang van het schip ’Titanic’ in 1912.

Ook recenter gebeurde rampen als de tsunami die in 2004 de landen aan de Indische Oceaan veel schade berokkende, tonen aan dat de vernietigende krachten van water immens groot en soms onontkoombaar zijn.

In verband met dit verwoestende karakter van water is het niet meer dan logisch dat de mens er alles aan doet om inzicht te verkrijgen in hoe men zich kan verweren tegen het water. Met name aan de kust en op schepen is het van belang dat mens en materiaal beschermd worden tegen water. Op het moment dat een schip zich midden op zee bevindt en er steile golven het dek op komen, moet het schip zo gebouwd zijn dat het door deze golven niet wordt verwoest. Net zo moeten bewoners van de kuststreken niet overspoeld worden op het moment dat opsteilende golven de kust naderen. In dit soort situaties gebeurt het vaak dat golven snel steiler worden en als een muur op danwel de kust danwel een schip afkomen. Op een gegeven moment stroomt het water over de dijk of over het dek. Op een schip stroomt het water vaak tegen hoger gelegen delen van het schip op en slaan de golven over. [1]

In feite lijkt de situatie die hierboven beschreven wordt in grote mate op een dam waarachter zich water bevindt en die op een gegeven moment breekt. In dat geval wordt gesproken van een damdoorbraak (*dambreak*). De muur van water die op het schip of de kust afkomt kan worden beschouwd als een ’dam’. Op het moment van de doorbraak gaat het water stromen en als het water vervolgens tegen een andere muur overslaat, hebben we te maken met een situatie als die op het dek van het schip. In deze vorm is het zogenaamde *dambreak*-probleem toepasbaar op schepen en kunnen berekeningen aan dit probleem worden gedaan om te kijken hoe sterk schepen gebouwd moeten worden.

In deze scriptie wordt gekeken naar een sterk vereenvoudigd model van een damdoorbraak. Doel is om de analyse achter de doorbraak te achterhalen. In het model wordt ervan uitgegaan dat het water zich op $t = 0$ achter de dam (op $x = 0$) bevindt, dus het water zit dan op $-\infty < x \leq 0$. Op $t = 0$ breekt de dam zonder dat er tijd verstrijkt. Het water gaat vervolgens stromen en komt onderweg geen obstakels tegen.

De belangrijkste vraag waarop een antwoord wordt gezocht, luidt: hoe kan het *dambreak*-probleem analytisch worden beschreven?

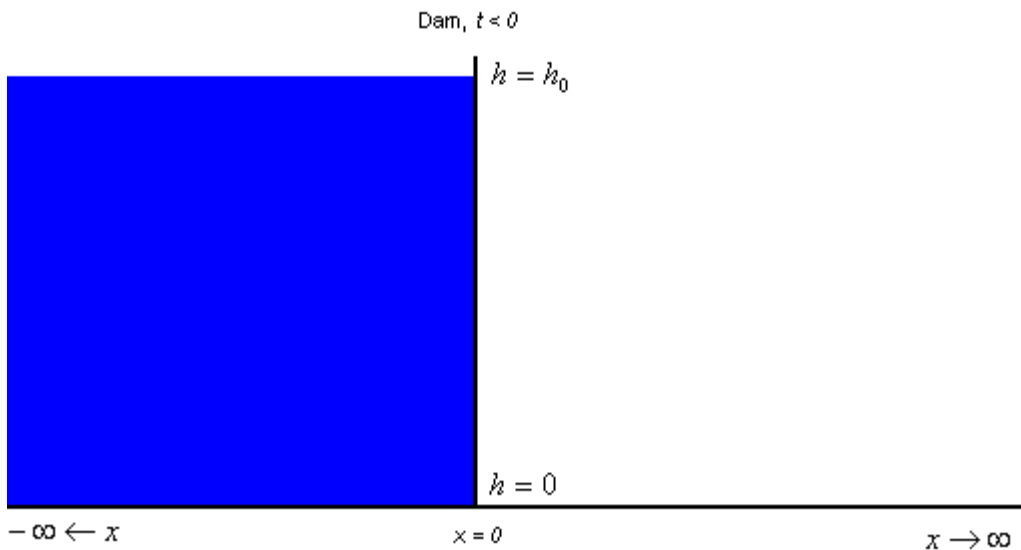
Hoofdstuk 2

Plan van aanpak

Voordat een beschrijving kan worden gegeven van hoe dit probleem zal worden aangepakt, lijkt het handig om eerst nog eens duidelijk de probleemstelling uiteen te zetten. Hierbij wordt het probleem opgedeeld in meerdere deelproblemen. Daarna zal het plan van aanpak uitvoerig worden beschreven.

2.1 Probleemstelling

Het probleem wordt op de volgende manier voorgesteld. Een dam bevindt zich tot het tijdstip $t = 0$ op plaats $x = 0$. Het water bevindt zich dan nog op $-\infty < x \leq 0$. Op het interval $0 < x < \infty$ bevindt zich voor de damdoorbraak nog geen water. Omdat het probleem in het vlak symmetrisch is, mag er worden gewerkt met een tweedimensionaal probleem. Er wordt van uitgegaan dat de dam op $t = 0$ in één keer wordt weggehaald, zonder dat er tijd verstrijkt. Daarna begint de tijd t te lopen. De situatie voor $t = 0$ is in figuur 2.1 weergegeven.

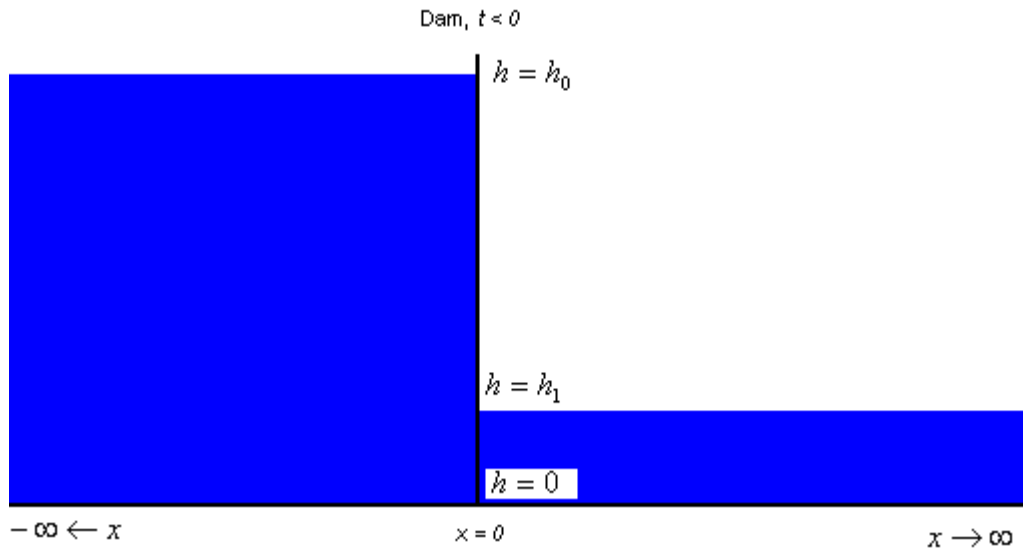


Figuur 2.1: een schematische weergave van de beginsituatie

De vraag die hierbij wordt gesteld is: hoe kan dit probleem analytisch worden beschreven? Er wordt gezocht naar de hoogtefunctie $h(x, t)$ die op elk tijdstip t en elke positie x de hoogte h weergeeft.

Vervolgens zal ook worden gekeken naar een soortgelijk probleem, waarbij de enige aanpassing is dat er voor de damdoorbraak ook al een klein laagje water op het interval $0 < x < \infty$ staat. Een schematische weergave van de beginsituatie hiervan is te zien in figuur 2.2.

Uiteraard is het ook nodig om te kijken of de gevonden formule toepasbaar is in de realiteit.



Figuur 2.2: een schematische weergave van de beginsituatie als zich aan beide kanten water bevindt

Dit is eveneens onderdeel van de analyse. Er wordt gekeken in hoeverre de simulaties die gedaan zullen worden met de gevonden formule afwijken van experimentele resultaten. Ook wordt gekeken in hoeverre de aannames die gedaan zijn nog houdbaar zijn in de fysische realiteit. Tot slot zal nog worden gekeken of een meer gecompliceerd simulatieprogramma ook dezelfde resultaten oplevert. Kort samengevat betekent dit dat in deze scriptie de volgende zaken aan bod zullen komen:

- definitie van het probleem,
- analyse van het probleem,
- op welke wijze een terugkoppeling naar de fysische realiteit kan worden gemaakt,
- of de analytische beschrijving overeenkomt met de experimentele uitkomsten,
- of de analytische beschrijving overeenkomt met simulaties.

Met het uiteenzetten van het probleem is al een groot begin gemaakt met de eerste van deze punten. In het hoofdstuk 'Mathematisch model' zal hier nog verder op worden ingegaan met de aannames die daar gedaan worden. Ook het tweede punt zal daar aan bod komen. In de daaropvolgende hoofdstukken zullen de laatste drie punten worden behandeld.

Voordat verder zal worden gegaan met het zoeken van de antwoorden op deze impliciete vragen, zal eerst nog worden vermeld wat het plan van aanpak is.

2.2 Methode

Allereerst zal een aantal aannames worden gedaan bij het probleem, om zo de mogelijkheid te behouden dat het probleem met de hand kan worden aangepakt. Deze aannames zullen gemaakt worden op basis van de aannames die in de literatuur terug te vinden zijn. Daarna zal met de nodige theorie over ondiep-watervergelijkingen, Riemann-invarianten en de methode van karakteristieken de wiskundige analyse worden gedaan.

Daarna zal het probleem onder de voorwaarde zoals in figuur 2.2 weergegeven, op soortgelijke wijze worden aangepakt.

Nadat dit is gedaan, kan worden begonnen met de nodige terugkoppeling met natuurkunde, experimenten en simulaties. Hiervoor zal op basis van de gevonden formule een simulatieprogramma worden geschreven (in MATLAB). Met behulp van dit programma kan worden bekeken of de gevonden formule strookt met experimentele resultaten. Tevens geeft dit programma de mogelijkheid het verloop van de gevonden hoogtefunctie in de tijd en in de ruimte te bekijken.

Daarna zullen in de discussie de gevonden resultaten worden besproken. Tot slot kunnen de conclusies worden getrokken.

Hoofdstuk 3

Mathematisch model

In dit hoofdstuk zal de analyse worden behandeld.

3.1 Analyse

Er wordt begonnen met het probleem zoals in figuur 2.1 is weergegeven. De snelheid in de x -richting wordt gegeven door u_x , die in de y -richting door u_y . Zoals gezegd, kan er worden gewerkt met een tweedimensionaal probleem, omdat het probleem in het vlak symmetrisch is en de z -component dus kan worden genegeerd. Bovendien wordt er gewerkt met een cartesisch coördinatenstelsel. De snelheden in de x - en de y -richting, alsmede een schets van hoe het water gaat lopen, zijn in figuur 3.1 weergegeven. Er wordt aangenomen dat er geen bodemwrijving is. Ook wordt aangenomen dat zich boven het water een gas bevindt met verwaarloosbare dichtheid en viscositeit en met een uniforme druk p_a . De oppervlaktetenspanning wordt gegeven door σ . Bij aanname is de vloeistof niet-viskeus en is de oppervlaktetenspanning σ verwaarloosbaar. [Richardson, 1989]

Ondiep-watervergelijkingen

Een volgende aanname is dat er wordt gewerkt met een onsamendrukbare vloeistof. Voor zo'n vloeistof geldt dat de dichtheid ρ constant is. Uit de wet van behoud van massa volgt nu dat

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (3.1)$$

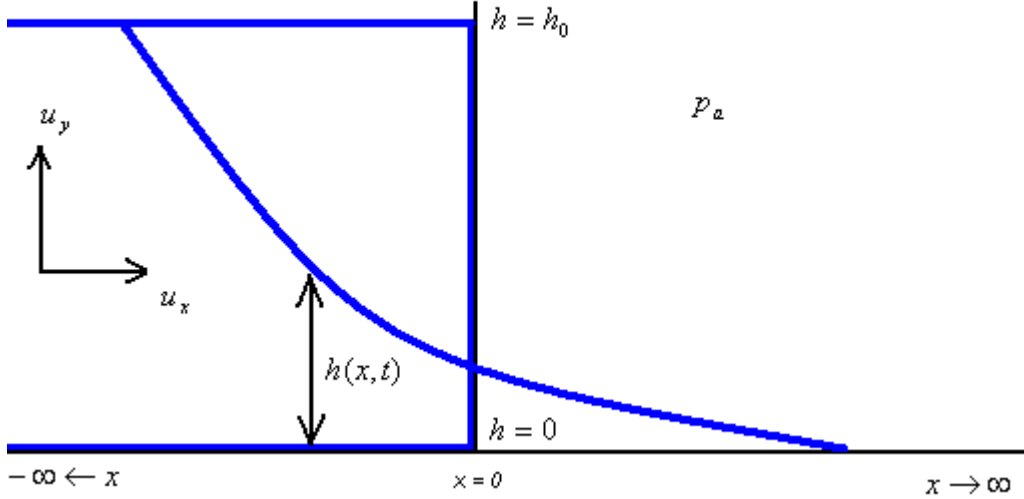
Bovendien is de wet van behoud van impuls van toepassing. Deze zegt dat

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \rho F. \quad (3.2)$$

Omdat F hierin gelijk is aan $(0, -g)$ en u aan (u_x, u_y) , is bovenstaande equivalent met

$$\begin{cases} \left(\frac{Du_x}{Dt} = \right) \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \left(\frac{Du_y}{Dt} = \right) \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g. \end{cases} \quad (3.3)$$

Een uitgebreide uitleg over de bovenstaande behoudswetten is te vinden in bijlage A. [Richardson, 1989]



Figuur 3.1: de snelheden en een schets van de hoogtefunctie $h(x,t)$

Keren we nu terug naar vergelijking (3.1), dan is te zien dat integratie hiervan levert dat

$$\int_0^h \frac{\partial u_y}{\partial y} dy = u_y|_{y=h} - u_y|_{y=0} = - \int_0^h \frac{\partial u_x}{\partial x} dy.$$

Omdat wordt uitgegaan van een niet-doorlatende bodem, is de snelheid in verticale richting op de bodem ($u_y|_{y=0}$) gelijk aan 0. Verder geldt per definitie van de materiële afgeleide dat

$$u_y|_{y=h} = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} (= - \int_0^h \frac{\partial u_x}{\partial x} dy). \quad (3.4)$$

Onder de aanname $|\frac{Du_y}{Dt}| \ll g$ volgt uit de wet van behoud van impuls voor de verticale impuls dat

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g.$$

Deze differentiaalvergelijking kan eenvoudig met behulp van scheiding van variabelen worden opgelost. Dit leidt tot de oplossing

$$p(y) = -\rho g y + c = p_a + \rho g(h - y),$$

met $p = p_a$ op $y = h$. [Richardson, 1989]

Uit de horizontale component van het behoud van impuls is bekend dat

$$\frac{Du_x}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Omdat $-g \frac{\partial h}{\partial x}$ onafhankelijk is van y en omdat de vloeistof voor $t \leq 0$ in rust en dus ook onafhankelijk van y is, geldt dat u_x onafhankelijk van y is $\forall t$. Dit impliceert dat $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$.

Wordt dit nu ingevuld in de eerste vergelijking van (3.3), dan volgt hieruit de vergelijking

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.6)$$

Verder volgt uit (3.4) dat

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} + \int_0^h \frac{\partial u_x}{\partial x} dy = 0. \quad (3.7)$$

Omdat $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ niet afhankelijk is van y , levert dit de vergelijking

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \quad (3.8)$$

[Richardson, 1989]

Met (3.6) en (3.8), die de ondiep-watervergelijkingen worden genoemd, wordt nu verder gewerkt.

Riemann-invarianten

Vergelijkingen (3.6) en (3.8) zien er in matrixvorm als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} h \\ u_x \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u_x & h \\ g & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ u_x \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Eenvoudig rekenwerk levert dat de eigenwaarden van bovenstaande 2×2 -matrix worden gegeven door $\lambda_{1,2} = u_x \pm \sqrt{gh}$. Verder zijn de bijbehorende eigenvectoren gelijk aan

$$v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \end{pmatrix}.$$

[Veldman, 2007]

Door nu deze eigenvectoren naast elkaar te plaatsen, worden de transformatiematrix S en diens inverse S^{-1} verkregen:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{g}{h}} & -\sqrt{\frac{g}{h}} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$S^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{h}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{g}{h}} & 1 \\ \sqrt{\frac{g}{h}} & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Omdat de 2×2 -matrix in (3.9), die nu A genoemd zal worden, kan worden geschreven als $A = S\Lambda S^{-1}$, waarbij Λ de matrix is met de eigenwaarden van A op de diagonaal, kan (3.9) worden herschreven tot

$$\begin{pmatrix} h \\ u_x \end{pmatrix}_t + A \begin{pmatrix} h \\ u_x \end{pmatrix}_x = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

en door dit met S^{-1} te vermenigvuldigen tot

$$S^{-1} \begin{pmatrix} h \\ u_x \end{pmatrix}_t + \Lambda S^{-1} \begin{pmatrix} h \\ u_x \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

[Veldman, 2007]

Hieruit ontstaan de vergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{h}}} \left[\left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_t + u_{xt} \right) + (u_x + \sqrt{gh}) \left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_x + u_{xx} \right) \right] = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{h}}} \left[\left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_t - u_{xt} \right) + (u_x - \sqrt{gh}) \left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_x - u_{xx} \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Omdat $\frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{h}}} \neq 0$ is dit equivalent met

$$\begin{cases} \left[\left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_t + u_{xt} \right) + (u_x + \sqrt{gh}) \left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_x + u_{xx} \right) \right] = 0, \\ \left[\left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_t - u_{xt} \right) + (u_x - \sqrt{gh}) \left(\sqrt{\frac{g}{h}} h_x - u_{xx} \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

De laatste vergelijking van (3.15) geldt nog steeds als er een minteken voor het geheel wordt geplaatst en dus kan deze vergelijking worden herschreven tot

$$\left[(u_{xt} - \sqrt{\frac{g}{h}} h_t) + (u_x - \sqrt{gh})(u_{xx} - \sqrt{\frac{g}{h}} h_x) \right] = 0. \quad (3.16)$$

[Veldman, 2007]

Nu kunnen de eerste vergelijking van (3.15) en vergelijking (3.16) worden geschreven als

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u_x + 2\sqrt{gh}) + (u_x + \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x}(u_x + 2\sqrt{gh}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(u_x - 2\sqrt{gh}) + (u_x - \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x}(u_x - 2\sqrt{gh}) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Immers, er geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\sqrt{gh}) = \frac{1}{\sqrt{gh}} gh_t = \sqrt{\frac{g}{h}} h_t.$$

En op soortgelijke wijze is ook

$$\frac{\partial}{\partial x}(2\sqrt{gh}) = \sqrt{\frac{g}{h}} h_x.$$

Uit (3.17) volgt nu dat $u_x \pm 2\sqrt{gh} (= u_x \pm 2c)$ constant zijn langs $\frac{dx}{dt} = u_x \pm \sqrt{gh} (= u_x \pm c)$. $u_x + 2\sqrt{gh}$ en $u_x - 2\sqrt{gh}$ worden *Riemann-invarianten* genoemd. [Veldman, 2007]

Aan de hand van deze Riemann-invarianten zal de verdere analyse plaatsvinden.

Methoden van karakteristieken

Voordat er verder wordt gegaan met de analyse, wordt eerst de fasesnelheid c gedefinieerd: $c^2 := gh$. Zonder verlies van algemeenheid kan de aanname $c > 0$ worden gemaakt. We keren nu terug naar de analyse. Het vervolg van de analyse maakt gebruik van de methode van karakteristieken. Op $(x < 0) \cap (t < 0)$ is het water in rust, en dus is $u_x = u_{x,0} = 0$. Het water heeft bovendien een constante hoogte h_0 . Daarom is de karakteristieke snelheid c constant, $c = c_0 = \sqrt{gh_0}$. Deze gegevens ingevuld in de vergelijking voor de helling $\frac{dx}{dt}$ levert dat de Riemann-invarianten op $(x < 0) \cap (t < 0)$ constant zijn langs de karakteristieken met helling $u_{x,0} \pm c_0 = \pm c_0 = \pm \sqrt{gh_0}$. Omdat c_0 constant is, geldt dat de Riemann-invarianten constant zijn langs een rechte lijn. Bovendien worden de Riemann-invarianten nu gegeven door $\pm 2c_0$. [Acheson, 2005]

Nu maken we de overstap naar een punt p in $(x < 0) \cap (t > 0)$. Het punt p is de intersectie

van een voorwaartse en een achterwaartse karakteristiek ($u_x + c$ en $u_x - c$, respectievelijk), die beide afkomstig zijn uit $(x < 0) \cap (t < 0)$. Van tevoren is niet bekend of de karakteristieken na $t = 0$ nog steeds rechte lijnen zullen zijn. Wel is bekend dat in het punt p geldt dat

$$u_x + 2c = 2c_0, \quad (3.18)$$

$$u_x - 2c = -2c_0. \quad (3.19)$$

Door vergelijking (3.19) van vergelijking (3.18) af te trekken, is te zien dat in dit geval $c = c_0$. Net zo volgt uit de optelling van (3.18) en (3.19) dat $u_x = 0$. Met deze twee gegevens worden de hellingen van de voorwaartse en de achterwaartse karakteristiek gegeven door $\pm c_0$. [Acheson, 2005]

De karakteristieken die voortkomen uit $(x < 0) \cap (t < 0)$ blijven dus ook na $t = 0$ rechte lijnen. De grens van het gebied waarvoor dit geldt, wordt beschreven door de lijn die door $x = 0$ gaat met helling $-c_0$. Dit is de lijn $x = -c_0 t$. De betekenis van deze lijn is dat het de achtergrens (linkergrens) is tussen onverstoord gebied en verstoord gebied.

Voorbij de lijn $x = -c_0 t$ zal elk punt q het snijpunt zijn van een voorwaartse karakteristiek die afkomstig is uit het onverstoorde gebied en een achterwaartse karakteristiek die daar niet vandaan komt. Langs de voorwaartse karakteristiek geldt

$$u_x + 2c = 2c_0. \quad (3.20)$$

Maar van de Riemann-invariant langs de achterwaartse karakteristiek is alleen bekend dát de invariant constant is:

$$u_x - 2c = k. \quad (3.21)$$

Hierin is k een onbekende constante. Optellen van (3.20) en (3.21) levert $2u_x = 2c_0 + k$, oftewel u_x is constant. Net zo levert (3.20) - (3.21) dat $4c = 2c_0 - k$; met andere woorden, ook c is constant. De achterwaartse karakteristiek heeft diensgevolge een helling $u_x - c = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{4}k$. Deze karakteristiek is wederom een rechte lijn, waarbij de helling afhangt van de constante k . [Acheson, 2005]

De 'waaier' van karakteristieken die zo ontstaat, is te zien in figuur 3.2. Voor verschillende waarden van k hebben de achterwaartse karakteristieken verschillende hellingen. Voor $k = k_1$ en voor $k = k_2$ zijn de hellingen $\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{4}k_1$ en $\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{4}k_2$. Als de karakteristieken met deze hellingen elkaar snijden, dan geldt in het snijpunt dat zowel $u_x - 2c = k_1$ als $u_x - 2c = k_2$. Maar van u_x en c mag normaliter worden aangenomen dat het enkelwaardige functies zijn. Dus alleen in het punt $(x, t) = (0, 0)$, waar toch al een discontinuïteit zit, kan worden verwacht dat de karakteristieken elkaar snijden. Omdat de achterwaartse karakteristieken rechte lijnen zijn, geldt dat $\frac{dx}{dt} = u_x - c$. Ook weten we van de Riemann-invariant langs de voorwaartse karakteristiek dat $u_x + 2c = 2c_0$. Het oplossen van deze twee vergelijkingen met twee onbekenden, levert

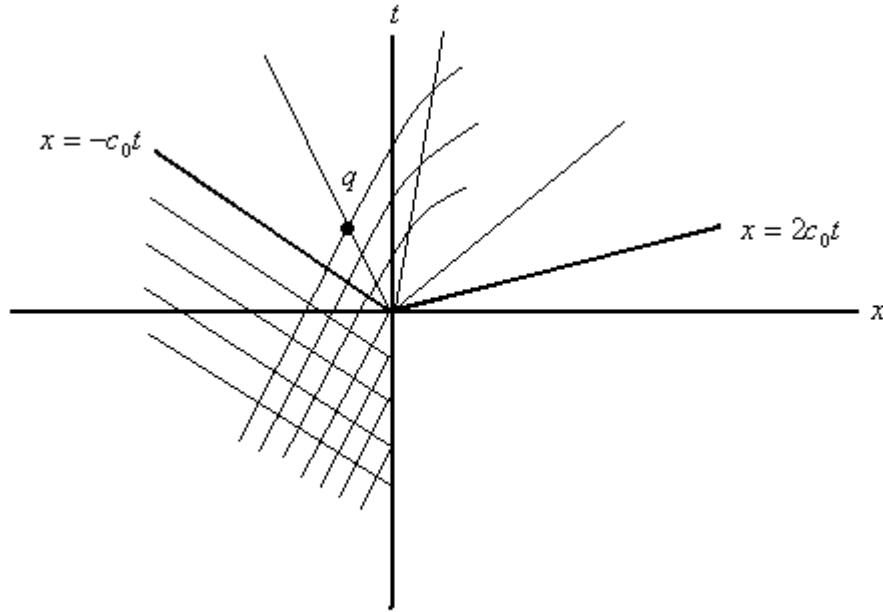
$$c = \frac{1}{3}\left(2c_0 - \frac{x}{t}\right), \quad (3.22)$$

$$u_x = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{t} + c_0\right), \quad (3.23)$$

[Acheson, 2005]

Omdat $c = \sqrt{gh} \geq 0$, kan de rechtergrens tussen verstoord en onverstoord gebied worden bepaald uit (3.22):

$$c = \frac{1}{3}\left(2c_0 - \frac{x}{t}\right) = 0$$



Figuur 3.2: verschillende karakteristieken

$$\Leftrightarrow 2c_0 = \frac{x}{t}$$

$$\Leftrightarrow x = 2c_0 t$$

Bovendien volgt uit (3.22) en het gegeven $c = \sqrt{gh}$ dat $\sqrt{gh} = \frac{1}{3}(2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t})$. Dit kan met enige algebraïsche vaardigheden worden omgeschreven tot de formule voor de hoogte $h(x, t)$ op het verstoorte gebied: $h(x, t) = \frac{1}{9g}[2(gh_0)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{t}]^2$. De hoogte $h(x, t)$ wordt dus gegeven door

$$h(x, t) = \begin{cases} h_0 & \text{als } x < -c_0 t \\ \frac{1}{9g}[2(gh_0)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{t}]^2 & \text{als } -c_0 t < x < 2c_0 t \\ 0 & \text{als } x > 2c_0 t \end{cases} \quad (3.24)$$

[Acheson, 2005]

Hoofdstuk 4

Model: aan beide kanten van de dam staat water

In de vorige sectie is gekeken naar de analyse van een damdoorbraak. In het besproken geval werd er uitgegaan van een dam met aan één kant water en aan de andere kant slechts een droge bodem. Nu zal er nogmaals naar de analyse worden gekeken, maar ditmaal in het geval dat de droge bodem is vervangen door een bodem met een laagje water.

De eerste vraag die hierbij beantwoord dient te worden, is: verschilt dit geval van het vorige? Immers, zo op het eerste gezicht lijkt het niet een heel slecht idee dezelfde methode aan te houden als in de vorige sectie, met als verschil dat de hoogte van het water $h_{0,abs}$ gelijk is aan $h_0 - h_1$. Gelukkig gaat dit al vrij snel fout en is het antwoord op de vraag 'ja'. In dit geval geldt vergelijking (3.6) namelijk niet langer, omdat er nu wel water in de y -richting door 'de bodem' (die zich op hoogte h_1 bevindt) kan stromen.

Hoe luidt de analyse dan wel in dit geval? Omdat er zich aan beide kanten water bevindt, komen er (voorwaartse) karakteristieken uit zowel $x \leq 0$ als uit $x > 0$. Omdat deze karakteristieken niet dezelfde helling hebben, maar de karakteristieken uit $x > 0$ steiler zijn, snijden deze lijnen elkaar. In het snijpunt van de twee karakteristieken geldt dat $u + 2c = c_0$ en $u + 2c = k$. De functie heeft hier dus twee waarden. De lijn die ontstaat door een lijn te trekken door alle snijpunten vormt de grens tussen twee gebieden. Op de lijn zelf is de oplossing meerwaardig, of beter, discontinu. Als gevolg van deze discontinuïteit ontstaat er een zogenaamde schokgolf [Johnson, 1997]. De grenslijn van de snijdende karakteristieken is in figuur 4.1 schematisch weergegeven.

Hoe kan deze schokgolf wiskundig worden beschreven? Om te beginnen zal weer gebruik worden gemaakt van de wet van behoud van massa, maar wel in enigszins aangepaste vorm, omdat het hier gaat om een discontinue oplossing. Bovendien wordt voor het gemak aangenomen dat de druk p en de snelheid u onafhankelijk zijn van y . [Johnson, 1997]

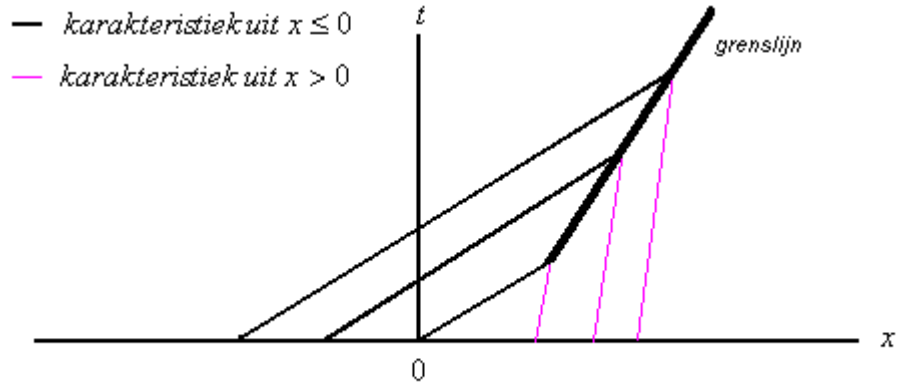
Als wordt aangenomen dat de dichtheid ρ alleen van de hoogte h afhangt, dan ziet de wet van behoud van massa er onder deze aannames als volgt uit:

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (4.1)$$

[Johnson, 1997].

Vergelijking (4.1) op het interval $[a, b]$ kan worden omgeschreven tot

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^b h dx \right) + hu|_a^b = 0. \quad (4.2)$$



Figuur 4.1: een schematische weergave van snijdende karakteristieken

Neem nu aan dat de schokgolf verspringt op $x = X(t)$. Dan kan de integraal uit (4.3) worden opgesplitst. Dit levert

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^{X^-} h dx + \int_{X^+}^b h dx \right) + hu|_a^b = 0, \quad (4.3)$$

waarin X^- staat voor $x \uparrow X(t)$ en X^+ voor $x \downarrow X(t)$. Uit (4.3) kan nu vergelijking (4.4) worden verkregen. [Johnson, 1997]

$$\int_a^b h_t dx + h^+ \frac{dX}{dt} - h^- \frac{dX}{dt} + hu|_a^b = 0 \quad (4.4)$$

Als in (4.4) nu de limiet $a \rightarrow b$ wordt genomen ([Johnson, 1997]), ontstaat de sprongrelatie die beter bekend is als één van de drie Rankine-Hugoniotrelaties [Veldman, 1993]. Dit levert

$$U[h] + [hu] = 0, \quad (4.5)$$

waarin $U = \frac{dX}{dt}$. De [en] geven hier en in het vervolg van dit hoofdstuk aan dat het gaat om de sprong in $x = X(t)$, dus $[h] = h^+ - h^-$. [Johnson, 1997] Merk op dat h^+ overeenkomt met h_0 in figuur 2.2 en h^- met h_1 . Dat betekent dat h^+ de hoogte op $x < X(t)$ is en dat h^- de hoogte op $x > X(t)$ is.

In het geval $U = 0$ volgt uit (4.5) dat

$$\begin{aligned} h^+ u^+ - h^- u^- &= 0 \Rightarrow \\ u^+ &= u^- \frac{h^-}{h^+}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

[Johnson, 1997].

De tweede stap is gebruikmaken van de wet van behoud van impuls. Ook deze wordt gebruikt in aangepaste vorm. Ervan uitgaande dat de druk p en de snelheid u nog altijd onafhankelijk zijn van y en dat ρ weer alleen afhankelijk is van h , blijft over:

$$u_t + uu_x + gh_x = 0 \quad (4.7)$$

Als (4.7) naar y wordt geïntegreerd, ontstaat:

$$\int_0^h (u_t + uu_x + gh_x) dy = 0. \quad (4.8)$$

Dit levert weer:

$$hu_t + hu u_x + hgh_x = 0, \quad (4.9)$$

[Johnson, 1997]. Vergelijking (4.9) gecombineerd met vergelijking (4.1) levert nu

$$hu_t + uh_t + (huu)_x + hgh_x = 0, \quad (4.10)$$

[Johnson, 1997].

Op dezelfde wijze als waarop dit bij (4.1) is gebeurd, kan (4.10) ook worden omgewerkt tot de volgende vergelijking.

$$\frac{d}{dt} \int_a^b (hu)_t dx + (hu)^+ \frac{dX}{dt} - (hu)^- \frac{dX}{dt} + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)|_a^b = 0. \quad (4.11)$$

Als in (4.11) weer de limietovergang $a \rightarrow b$ wordt genomen, ontstaat de volgende sprongrelatie:

$$U[hu] + [hu^2 + \frac{1}{2}gh^2] = 0. \quad (4.12)$$

In dit geval volgt uit $U = 0$ de vergelijking

$$h^+(u^+)^2 + \frac{1}{2}g(h^+)^2 - (h^-(u^-)^2 + \frac{1}{2}g(h^-)^2) = 0 \quad (4.13)$$

en dus ook

$$\frac{1}{2}g((h^+)^2 - (h^-)^2) = h^-(u^-)^2 - h^+(u^+)^2, \quad (4.14)$$

[Johnson, 1997].

De laatste stap is vergelijking (4.6) invullen in vergelijking (4.14). De leidt tot

$$\frac{1}{2}g((h^+)^2 - (h^-)^2) = h^-(u^-)^2(1 - \frac{h^-}{h^+}) \quad (4.15)$$

Nu wordt substitutie $h_s = \frac{h^+}{h^-}$ uitgevoerd. Bovendien wordt gebruikgemaakt van het getal van Froude. Dit is gedefinieerd als $F = \frac{u}{\sqrt{gh}}$ [Johnson, 1997]. Meer informatie over het getal van Froude is te vinden in bijlage C.

Met de bovenstaande substitutie verandert vergelijking (4.15) na enig omschrijven in

$$h_s^2 - 1 = 2F^2(1 - \frac{1}{h_s}), \quad (4.16)$$

[Johnson, 1997].

Het oplossen van (4.16) naar h_s levert het gewenste resultaat, namelijk het quotiënt $\frac{h^+}{h^-}$, dat afhankelijk is van de tijd en de plaats.

$$h_s = \frac{h^+}{h^-} = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{1 + 8F^2} - 1) \quad (4.17)$$

Met (4.17) ligt de hoogte $h(x, t)$ op elk tijdstip t en elke plaats x vast. De precieze waarde kan middels een iteratief proces uit (4.17) worden verkregen [Stansby, 1998].

Hoofdstuk 5

Terugkoppeling natuurkunde

In de vorige twee secties is gekeken naar de analyse achter het *dambreak*-probleem. Hierbij ging het om een wiskundige analyse die verder weinig rekening heeft gehouden met de fysische realiteit. In deze sectie zal geprobeerd worden om op een meer natuurkundige wijze te kijken of de analyse draagvlak vindt bij de fysische realiteit.

5.1 Aannames

In hoofdstuk 2 zijn verschillende aannames gedaan voordat er begonnen werd met de analyse. Per aanname zal worden gekeken of deze realistisch is.

De aanname dat zich boven de vloeistof gas bevindt dat een verwaarloosbare dichtheid, een verwaarloosbare viscositeit en uniforme druk heeft en waarvan de oppervlaktespanning σ met het water ook te verwaarlozen is, wordt niet meer behandeld. Deze aanname is namelijk in de meeste literatuur wel terug te vinden is als een redelijke aanname (zie bijvoorbeeld [Richardson, 1989]).

De aanname dat er geen bodemwrijving is, wordt verdedigd met het volgende argument. De krachten die bij de damdoorbraak vrijkomen zijn in verhouding tot de wrijvingskrachten zo groot, dat de wrijvingskrachten verwaarloosd mogen worden.

Damdoorbraak kost geen tijd

In de analyse is ervan uitgegaan dat de doorbraak van de dam op $t = 0$ gebeurt zonder dat er tijd verstrijkt. In werkelijkheid is dit natuurlijk niet het geval en daarom zal het water geleidelijker vrijkomen dan onder deze aanname het geval is. [Stansby, 1998]

Onder de aanname ontstaat er op $(x, t) = (0, 0)$ een singulariteit, doordat het water dan in het punt $(h, x) = (0, 0)$ een oneindige versnelling krijgt. Uiteraard is dit fysisch niet mogelijk. Echter, deze singulariteit heeft tot fysisch gevolg dat het water daar gaat stromen. [Stansby, 1998]

Ter verdediging van de aanname kan verondersteld worden dat het geval waarbij er geen tijd verstrijkt het slechtste geval is. Als er hier niet al te vreemde dingen gebeuren, zal dit ook niet gebeuren als de damdoorbraak wel tijd kost [Stansby, 1998]. Met dit argument lijkt de aanname toch houdbaar.

Tweedimensionale analyse

Een tweede aanname waaronder de analyse heeft plaatsgevonden, is de aanname dat het probleem in het vlak symmetrisch is. Met de hoogte in de y -richting, de lengte in de x -richting en de breedte in de z -richting betekent dit dat de hoogte op elk punt (x_1, z) hetzelfde is $\forall z$ en dus niet afhankelijk is van z .

Deze aanname klinkt erg plausibel. Als de dam in de z -richting erg breed wordt genomen, bijvoorbeeld $-d < z_{dam} < d$, met $|d| \gg h$, dan zal de invloed van de randen op $z = d$ en $z = -d$ op het interval rondom $z = 0$ niet of nauwelijks merkbaar zijn. Rondom $z = 0$ zal de hoogte h voor alle z binnen dat interval dan ook op elke plaats x op elk tijdstip t hetzelfde zijn. Dit betekent dat de hoogte inderdaad niet afhankelijk is van z en dat inderdaad kan worden gewerkt met een tweedimensionaal probleem.

De vloeistof

Bij de analyse is ook aangenomen dat het water een niet-viskeuze, onsamendrukbare vloeistof is. Onsamendrukbaar houdt in dat de dichtheid ρ constant is. Omdat water geen gas, maar een 'echte' vloeistof is, is deze aanname zeer reëel [Hoogstraten, 1997].

Voor het berekenen van de viscositeit van water, wordt gebruikgemaakt van de *kinematische viscositeitscoëfficiënt* ν . Deze wordt gegeven door

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (5.1)$$

waarin μ de *dynamische viscositeitscoëfficiënt* is. De waarde van μ voor water is ongeveer 10^{-3} Pa·s. [Veldman, 2007].

Het soortelijk gewicht van water is ongeveer $1 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$. Hiermee wordt de waarde van ν voor water gelijk aan $10^{-6} \frac{m^2}{s}$. Deze waarde van ν lijkt verwaarloosbaar. Daarmee lijkt het plausibel dat wordt uitgegaan van een niet-viskeuze, onsamendrukbare vloeistof.

5.2 Glad vrij oppervlak

Intuïtief is het duidelijk dat het water na de damdoorbraak op een gegeven moment een glad oppervlak zal hebben, zonder discontinuïteiten. Om dit echter te kunnen verklaren is een goede redenering nodig. Daarom wordt allereerst aangenomen dat de discontinuïteit in de hoogtefunctie $h(x, t)$, die er aanvankelijk op $t = 0$ in het punt x_d is, wordt opgeheven. Hierin is x_d de plaats waarop de dam zich bevindt, in ons geval is dat $x_d = 0$. Er moet nu eerst worden gekeken naar het gebied $-c_0 t < x < 2c_0 t$. In dit gebied wordt de hoogte $h(x, t)$ gegeven door (3.24),

$$h = \frac{1}{9g} \left[2(gh_0)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{t} \right]^2.$$

Verder geldt dat in dit gebied $u_x + 2c = 2c_0$. Hieruit volgt dat aan vergelijking (3.17) wordt voldaan als het plusteken wordt ingevuld. De volgende stap is om voor u_x de substitutie $2c_0 - 2c$ uit te voeren. Vergelijking (3.17) met het minteken ingevuld, wordt dan gelijk aan

$$-4 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + (2c_0 - 3c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.2)$$

en dus

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (2c_0 - 3c) \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (5.3)$$

[Acheson, 2005]

Vervolgens wordt $z := 3c - 2c_0$ geschreven en hierdoor wordt (5.3) gelijk aan

$$\frac{\partial z}{\partial t} - z \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (5.4)$$

Het is deze vergelijking die we nader zullen beschouwen. Ten eerste kan worden opgemerkt dat vergelijking (5.4) een algemene oplossing heeft van de vorm $z = F(x + zt)$. Hieruit volgt dat z als functie van x en t kan worden gezien, dus $z(x, t)$. Dat $F(x + zt)$ inderdaad een oplossing is, is als volgt in te zien:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F'(x + zt) \left(\frac{\partial z}{\partial t} t + z \right).$$

[Acheson, 2005]

Deze formule omzetten naar een formule voor $\frac{\partial z}{\partial t}$, waarbij dit niet langer van zichzelf afhangt levert

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{zF'(x + zt)}{1 - tF'(x + zt)}.$$

Op dezelfde manier wordt voor $\frac{\partial z}{\partial x}$ verkregen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'(x + zt) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) t$$

en dus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'(x + zt)}{1 - tF'(x + zt)}.$$

[Acheson, 2005]

Stel dat de functie $F(x + zt)$ op $t = 0$ een zekere waarde z_w aanneemt. Dan wordt deze waarde aangenomen voor een zekere waarde x_w . Stel dat deze zelfde waarde z_w voor een $t_v > 0$ weer wordt aangenomen, dan gebeurt dit voor een waarde van x_v waarvoor geldt dat $x_v + t_v z_w = x_w$. Met andere woorden, dit gebeurt voor een x die ervoor zorgt dat het argument van de functie F onveranderd blijft. In het bijzonder is x_v gelijk aan $x_w - t_v z_w$. Deze waarde z_w beweegt zich dus als het ware met een snelheid z_w voort naar links en er geldt dat grotere waarden van z zich sneller voortbewegen. [Acheson, 2005]

We keren nu terug naar het *dambreak*-probleem. Meteen na de damdoorbraak is $h(x, t)$ een dalende functie, die afhangt van x . Ook hier geldt dat grotere waarden van z zich sneller voortbewegen en uit de definitie van z volgt dat hetzelfde geldt voor c en dus voor $h(x, t)$. Dit betekent dat de grotere waarden van $h(x, t)$ sneller weer voorkomen en sneller afnemen dan kleinere waarden. Dit zorgt ervoor dat het vrije oppervlak na enige tijd glad wordt, zoals van tevoren al werd verwacht [Acheson, 2005]. Bij het geval dat in hoofdstuk 4 werd beschouwd, is juist het tegenovergestelde het geval. Hierdoor ontstaat in het geval dat aan beide kanten van de dam water staat, een schok.

Uiteraard is het in (3.24) ook al te zien dat voor $t \rightarrow \infty$ de hoogte $h(x, t)$ naar de constante waarde $h(x, t) = \frac{1}{9g} [2(gh_0)^{\frac{1}{2}}]^2$ gaat op het interval $d_1 < x < d_2$, met $-\infty < d_1, d_2 < \infty$.

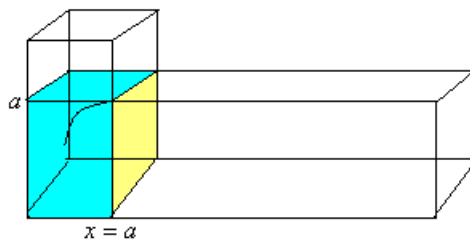
Hoofdstuk 6

Terugkoppeling experimenten

De hoogtefunctie $h(x, t)$, vergelijking (3.24), die is afgeleid, ziet er in theorie goed uit. Echter, de vraag is of de hoogte die het water op tijdstip t en positie x aanneemt volgens de formule, ook overeenkomt met de waarde van de hoogte volgens experimentele waarden.

Daarom wordt in dit hoofdstuk onderzocht in hoeverre de resultaten van een experimentele 'damdoorbraak' overeenkomen met de resultaten van de simulaties die gedaan zijn met dezelfde waarden, maar nu met behulp van het MATLAB-programma 'hoogtesim', dat te vinden is in bijlage D.

Het onderzoek waarvan gebruik wordt gemaakt, is het onderzoek van Martin en Moyce. In dit onderzoek zijn verschillende 'damdoorbraken' gedaan. In deze scriptie zal er alleen een vergelijking worden gemaakt met de twee experimenten die in het vlak symmetrisch zijn. Een schematische voorstelling van de opstelling die in dit experiment gebruikt is, is te zien in figuur 6.1. Een uitgebreide beschrijving van het hele experiment is terug te vinden in de literatuur (zie [Martin, 1952]). In figuur 6.1 is te zien dat een dam (op plaats $x = a$) staat. Met behulp van een hendel wordt deze weggehaald. Het water dat zich achter de dam bevindt, gaat stromen en botst vervolgens tegen de andere wand aan.



Figuur 6.1: schematische weergave van de opstelling zoals door Martin en Moyce is gebruikt

6.1 Experiment met beginhoogte $a = 0.05715(m)$

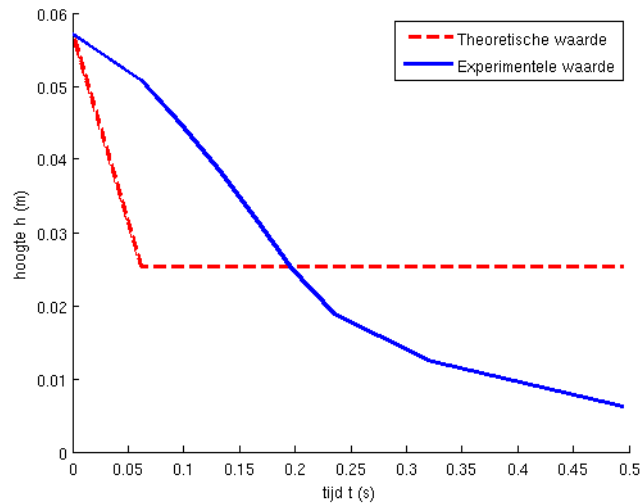
In het experiment van Martin en Moyce is de hoogte op $x = a$ gemeten op verschillende tijden. Zij hebben gerekend met inches. Omgerekend naar meters levert dat voor de beginhoogte $a = 0.05715$ de uitkomsten zoals die in tabel 6.1 te zien zijn. Merk op dat $x = a$ in hun

Tijdstip $t(s)$	Hoogte $h(m), \cdot 10^{-2}$
0.0000	5.715
0.0611	5.086
0.0985	4.458
0.1328	3.829
0.1641	3.200
0.1962	2.514
0.2351	1.886
0.3183	1.257
0.4947	0.6287

Tabel 6.1: de waarden van de hoogte op $x = 0.05715(m)$ voor verschillende tijdstippen

experiment overeenkomt met $x = 0$ in dit onderzoek, aangezien in dit onderzoek de aanname is dat de dam op $x = 0$ staat.

Het experiment is met behulp van het programma 'hoogtesim', dat te vinden is in bijlage D, nagebootst. Merk op dat dit programma altijd uitgaat van water op $-\infty < x \leq 0$ voor de damdoorbraak. De resulterende plot is te vinden in figuur 6.2.

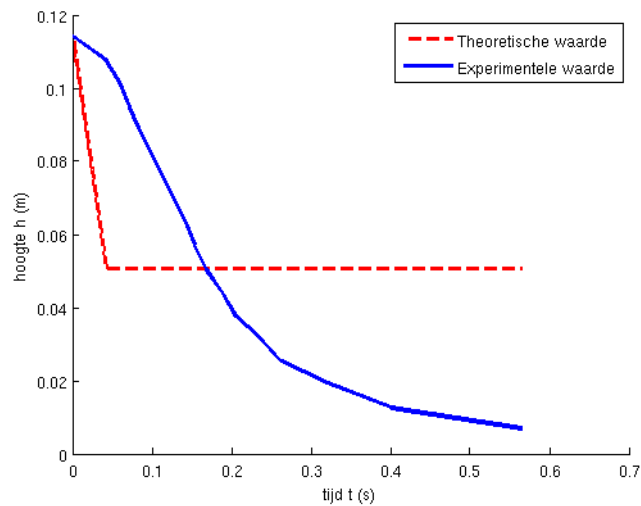


Figuur 6.2: de experimentele en theoretische waarden in één grafiek, $a = 0.05715(m)$

6.2 Experiment met beginhoogte $a = 0.1143(m)$

Ook in dit experiment is de hoogte op plaats $x = 0.05715(m)$ weer op verschillende tijdstippen gemeten, maar nu met beginhoogte $a = 0.1143(m)$. De meetwaarden, omgerekend naar meters, zijn terug te vinden in tabel 6.2. Wederom is in het programma 'hoogtesim' dit experiment nagebootst. Dit levert de plot die in figuur 6.3 is te zien.

Tijdstip $t(s)$	Hoogte $h(m), \cdot 10^{-2}$
0.0000	11.43
0.0427	10.74
0.0710	10.17
0.0824	9.487
0.0977	8.915
0.1115	8.230
0.1267	7.658
0.1267	6.972
0.1405	6.401
0.1527	5.715
0.1687	5.029
0.1870	4.457
0.2061	3.772
0.2336	3.200
0.2626	2.515
0.3206	1.943
0.4214	1.257
0.5649	0.6858

Tabel 6.2: de waarden van de hoogte op $x = 0.05715(m)$ voor verschillende tijdstippenFiguur 6.3: de experimentele en theoretische waarden in één grafiek, $a = 0.1143(m)$

Hoofdstuk 7

Terugkoppeling simulaties met Savof'96

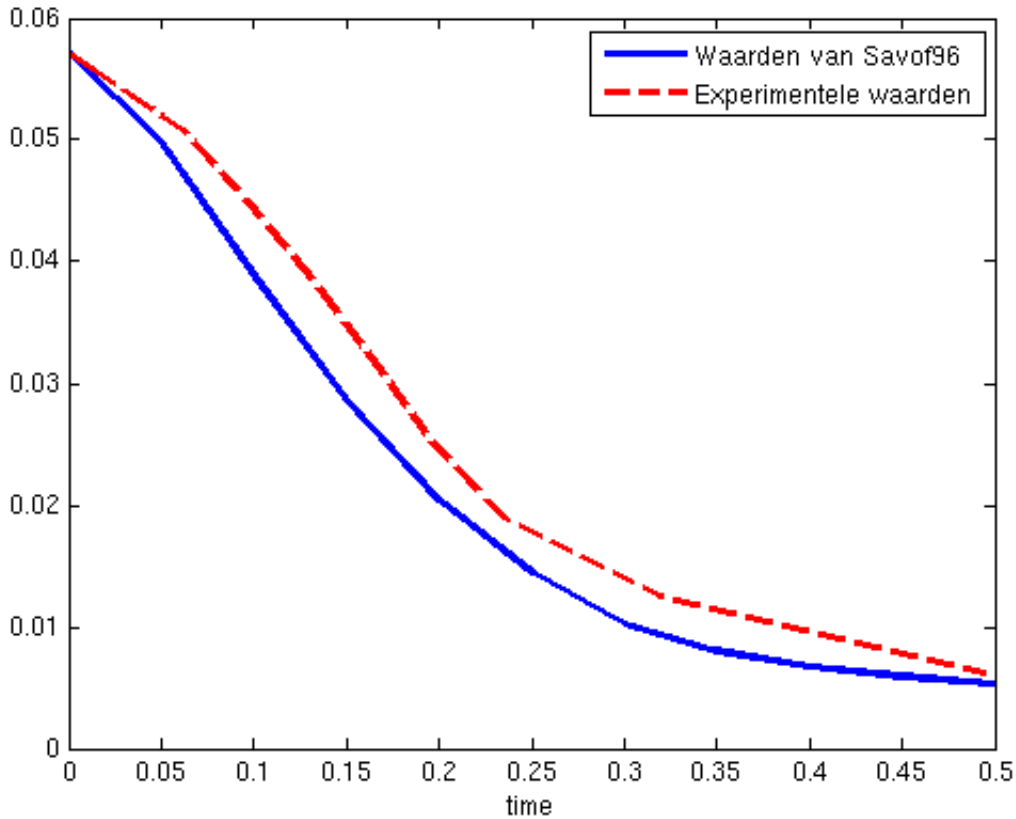
In dit hoofdstuk zal er een terugkoppeling gemaakt worden met de resultaten van een ander simulatieprogramma, te weten Savof'96. Allereerst zal er gekeken worden of het simulatieprogramma zelf soortgelijke resultaten geeft als het experiment van Martin en Moyce wordt nagebootst. Daarna zal onderzocht worden of het simulatieprogramma ook resultaten geeft die stroken met de (analytische) resultaten van het programma 'hoogtesim'.

7.1 Vergelijking simulatie en experiment

In deze paragraaf worden de resultaten van het experiment van Martin en Moyce met beginhoogte $a = 0.05715(m)$ vergeleken met de resultaten van een simulatie van dit experiment met behulp van het programma Savof'96. Doel hiervan is om te kijken of Savof'96 simulaties geeft die overeenkomen met de realiteit.

Allereerst wordt daarvoor de hoogte $h(x, t)$ op de gemeten tijdstippen (zie tabel 6.1) nogmaals in een grafiek gezet. Deze grafiek is te vinden in figuur 7.1.

Daarna wordt de invoerfile van Savof'96 zo aangepast dat deze dezelfde beginwaarden heeft als in het experiment het geval was. De beginhoogte wordt op $a = 0.05717$ gezet en de lengte van de waterkolom wordt ook op $0.05717(m)$ gezet. Vervolgens wordt er een simulatie over hetzelfde tijdsinterval uitgevoerd. Merk op dat Savof'96, in tegenstelling tot hoogtesim, wel op een begrens interval een damdoorbraak kan simuleren. De grafiek die deze procedure tot resultaat had, is ook te vinden in figuur 7.1.



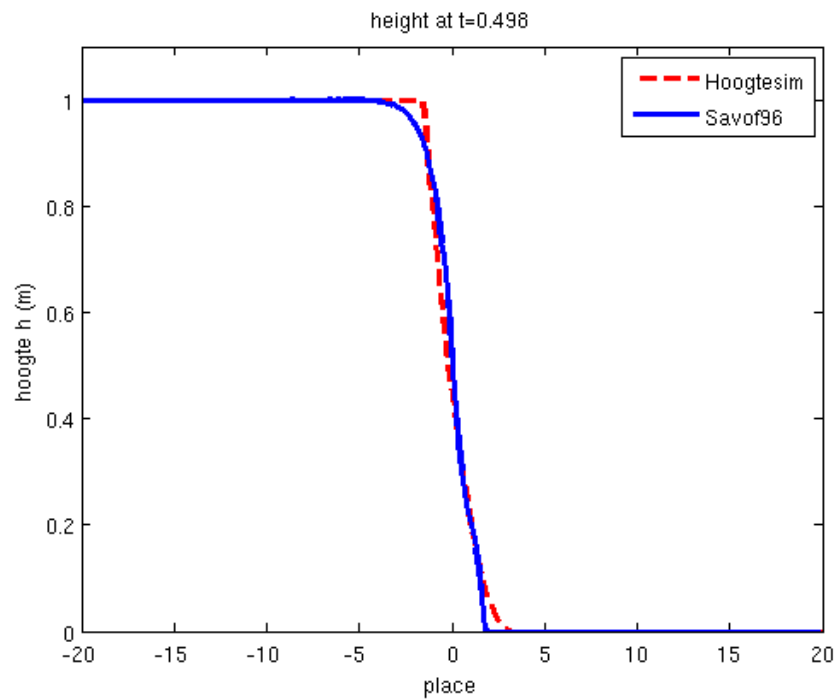
Figuur 7.1: de waarden van het experiment en de simulatie in één grafiek, $a = 0.05715(m)$

7.2 Vergelijking simulatie Savof'96 en simulatie hoogtesim

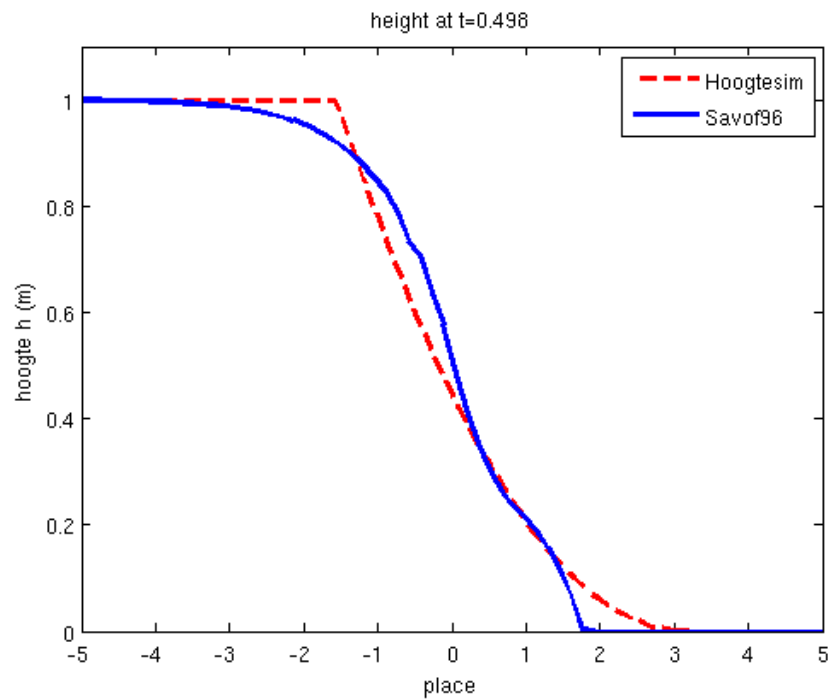
In deze paragraaf worden de resultaten die 'hoogtesim' geeft, vergeleken met de resultaten van Savof'96.

Het programma 'hoogtesim' is een implementatie van functie (3.24). Deze functie is afgeleid onder de aanname dat de waterkolom voor de damdoorbraak zich op $-\infty < x \leq 0$ bevindt en dat het water na de damdoorbraak verder kan gaan stromen op het interval $0 < x < \infty$. Onder deze aanname konden de ondiep-watervergelijkingen worden gebruikt. Om dit te simuleren met Savof'96, zal gebruik worden gemaakt van een 'benadering' van $(-\infty, \infty)$. Als de beginhoogte van de waterkolom 1 meter wordt genomen, dan is het interval $(-20, 20)$ met de dam op $x = 0$ al een redelijke benadering, die gebruik van de ondiep-watervergelijkingen toestaat.

Met de bovenstaande gegevens ($h_0 = 1$, $-20 < x < 20$) is de simulatie uitgevoerd. Het gesimuleerde tijdsinterval was $0 \leq t \leq 0.5$. De resultaten hiervan zijn in de figuren 7.2 en 7.3 te zien. Eerst is er een grafiek opgenomen van de hoogte van het water op het hele interval op $t = 0.5$. Daarna is er een grafiek opgenomen van dezelfde simulatie, maar nu ingezoomd op het interval $-5 < x < 5$.



Figuur 7.2: de waarden van Savof'96 en hoogtesim in één grafiek

Figuur 7.3: de waarden van Savof'96 en hoogtesim in één grafiek, ingezoomd op $-5 < x < 5$

Hoofdstuk 8

Discussie

In de voorgaande hoofdstukken is uitgebreid de analyse achter een damdoorbraak aan de orde geweest, alsmede een terugkoppeling met de natuurkunde, met daadwerkelijke experimenten en met simulaties door het programma Savof'96.

De hoogtefunctie $h(x, t)$ (vergelijking (3.24)) die in hoofdstuk 3 is afgeleid, is redelijk onderbouwd. Er zijn enkele aannames gedaan, maar zoals in het hoofdstuk over de terugkoppeling met de natuurkunde naar voren is gekomen, lijken deze plausibel.

In vergelijking met de experimenten van Martin en Moyce geeft het simulatieprogramma dat op basis van vergelijking (3.24) is gemaakt, erg afwijkende resultaten (grafieken in figuur 6.2 en 6.3). De oorzaak ligt hier waarschijnlijk in het feit dat het experiment zoals dat door Martin en Moyce is uitgevoerd, niet kan worden geanalyseerd met behulp van de ondiep-watervergelijkingen. Immers, in dit experiment is de beginhoogte gelijk aan de oorspronkelijke lengte van de waterkolom. Voor het gebruik van de ondiep-waterverhoudingen zou de beginhoogte juist klein moeten zijn in verhouding tot de oorspronkelijke lengte van de waterkolom.

Bij de afleiding van de hoogtefunctie $h(x, t)$ is juist uitgegaan van een oneindig lang interval en dan is de genomen beginhoogte in verhouding zo klein dat deze ondiep-watervergelijkingen wel gebruikt kunnen worden. Echter, als met deze hoogtefunctie het experiment wordt nagebootst (waarbij de beginhoogte wel gelijk is, maar de lengte van de waterkolom in het geval van simulatie gelijk is aan $-\infty < x < 0$), dan levert dit een simulatie waarvan de resultaten niet goed overeenkomen met de resultaten van het experiment.

Een andere oorzaak kan zijn dat in het experiment van Martin en Moyce het probleem niet symmetrisch is in het vlak, omdat de zijwanden op zo'n kleine afstand van elkaar liggen. Eventuele wrijvingskrachten die langs de zijwanden ontstaan, hebben mogelijk ook effect op de stroming van het water. Bovendien is vergelijking (3.24) voor $t > 0$ in het punt $x = 0$ altijd gelijk aan $\frac{1}{9g}[2(gh_0)^{\frac{1}{2}}]^2$. Dit betekent dat de waarde in het punt $x = 0$ constant is voor $t > 0$. Intuïtief is het duidelijk dat in een experiment de factoren, die in de theorie zijn verwaarloosd, waarschijnlijk wel zo'n invloed hebben dat de hoogte in $x = 0$ voor $t > 0$ geen constante waarde zal zijn.

Een laatste opmerking die aan de hand van de experimentele resultaten gemaakt moet worden, is de volgende. Het was waarschijnlijk de betrouwbaarheid van deze resultaten ten goede gekomen als er op een ander punt, dus op een punt $x \neq 0$, was vergeleken. Merk op dat het programma Savof'96 wel resultaten geeft die aardig overeenkomen met de resultaten van het experiment (zie figuur 7.1).

In vergelijking met de resultaten van het simulatieprogramma Savof'96 komen de resultaten van de theorie wel redelijk overeen. De algemene vorm van de grafieken komt overeen (zie figuur 7.2). Lokaal zit er toch nog wel wat verschil in de vorm van de grafiek (zie figuur 7.3). In deze simulatie op $-20 < x < 20$ waren de ondiep-watervergelijkingen wel van toepassing. In de grafieken van Savof'96 buigt de grafiek op het moment dat het water gaat stromen, wat minder abrupt af. Dit heeft zijn oorzaak in het feit dat in deze simulatie geen discontinuïteit zit, terwijl deze in de hoogtefunctie $h(x, t)$ (vergelijking (3.24)) wel aanwezig is.

In de grafieken die met Savof'96 gemaakt zijn, zijn ook bodemwrijvingskrachten waar te nemen. De voorkant van het bewegende water komt namelijk in de simulatie met Savof'96 minder ver dan met de simulatie met hoogtesim (zie figuur 7.2 en 7.3). Het water wordt hier door wrijving met de bodem afgeremd. Bij hoogtesim is deze wrijving verwaarloosd en daardoor gaat het water sneller in de simulatie met hoogtesim.

De afgeleide theorie zou verbeterd kunnen worden door bodemwrijvingskrachten mee te nemen in het model. Ook zou gekeken kunnen worden hoe de eigenschappen van het gas dat zich boven het water bevindt, invloed hebben op het model. Echter, als deze factoren niet langer verwaarloosd worden, lijkt het ondoenlijk de analyse nog zonder computers uit te voeren.

Tot slot is het opmerkelijk dat het geval van een natte bodem aan de andere kant van de dam een totaal andere oplossing geeft dan het geval van een droge bodem. Als we nog even naar de gevallen kijken die al in de inleiding zijn beschreven (overslaande golven op een schip of op de kust), dan is het niet ondenkbaar dat er al een laagje water aan de andere kant van de 'dam' staat. Voordat het water als een muur ('dam') op het schip of de kust afkomt, kunnen er al andere golven voorgegaan zijn, die zijn overgeslagen. Deze kunnen dan een laagje water hebben achtergelaten. In dit geval is het geval dat er water aan beide kanten van de dam staat van toepassing.

Uit bovenstaande mag het volgende geconcludeerd worden. De analytische hoogtefunctie die in dit onderzoek is afgeleid, is niet geschikt als basis voor een model voor 'damdoorbraken' waarbij de golven niet op ondiep-water zijn en waarbij de golven vervolgens tegen een muur overslaan. Als model voor een damdoorbraak op ondiep-water voldoet het model redelijk, maar doordat er veel aannames gemaakt zijn en veel factoren verwaarloosd zijn, is het model nog niet optimaal. Het model zou verbeterd kunnen worden, door de verwaarloosde factoren (bodemwrijving, invloed eigenschappen gas, viskeuze krachten) wel mee te nemen in het model. Vergelijking (3.24) geeft echter wel een redelijke eerste, algemene indruk van wat er gebeurt bij zo'n damdoorbraak.

Referenties

Boeken en artikelen

- Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics* (10^e druk), Oxford, Clarendon Press, 2005
- Friedberg, S.H., Insel, A.J., Spence, L.E., *Linear algebra* (4^e druk), New Jersey, Pearson Education, 2003
- Hoogstraten, H.W., *Stromingsleer, collegedictaat*, Groningen, Rijksuniversiteit Groningen, 1997
- Johnson, R.S., *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997
- Martin, J.C., Moyce, W.J., *Part IV. An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1952, 244, 312-324
- Richardson, S.M., *Fluid Mechanics*, Londen, Hemisphere publishing corporation, 1989, p. 148-162
- Stansby, P.K., Chegini, A., Barnes, T.C.D., *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, 374, 407-424
- Tiesinga, G, *Mathematische fysica, collegedictaat*, Groningen, Rijksuniversiteit Groningen, 2004
- Veldman, A.E.P., *Partiele differentiaalvergelijkingen*, Groningen, Rijksuniversiteit Groningen, 1993
- Veldman, A.E.P., Velická, A., *Stromingsleer*, Groningen, Rijksuniversiteit, 2007

Internetpagina's

1. <http://dissertations.ub.rug.nl/FILES/faculties/science/2005/k.m.t.kleefsman/samenvat.pdf>, retrieved: 23 juni 2007
2. <http://www.waterland.net/index.cfm/site/Nederland%20Waterland/pageid/BAC8FBAE-B726-A821-B2F2D1CA1074AD8C/index.cfm>, retrieved: 4 juli 2007
3. http://www.vwo-campus.nl/leerling/experiment/sugdocs/76/wsss_proef2_lln.pdf, retrieved: 4 juli 2007

4. <http://www.ahd.tudelft.nl/fransn/wb1220/Colleges/Coll-10.PDF>, retrieved: 4 juli 2007

Programma's

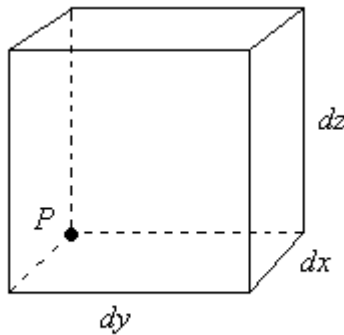
- *Savof '96*, 2003

Bijlage A

Behoudswetten

A.1 Wet van behoud van massa

De eerste behoudswet is de wet van behoud van massa. Deze wet wordt ook wel de continuïteitsvergelijking genoemd en zegt dat de massa van een gesloten systeem constant is. In een niet-gesloten, driedimensionaal systeem betekent het dat de toename van de massa over een tijdsinterval $[t, t + dt]$ in het volume-elementje met afmetingen dx , dy en dz gelijk moet zijn aan de massa die netto door de zes zijvlakken van het elementje naar binnen stroomt. In figuur A.1 is een dergelijk volume-elementje weergegeven. De toename van de massa over het



Figuur A.1: een volume-elementje (dx, dy, dz)

interval $[t, t + dt]$ is $m_{t+dt} - m_t$ en omdat $m = \rho V$ en het volume in de tijd niet verandert, is dit gelijk aan:

$$[\rho(x, y, z, t + dt) - \rho(x, y, z, t)] dx dy dz. \quad (\text{A.1})$$

De massa die netto door de zes zijvlakken van het elementje naar binnen stroomt is gelijk aan de som van netto-instroom in de x -, de y - en de z -richting:

$$\begin{aligned} & [(\rho u_x)(x, y, z, t) - (\rho u_x)(x + dx, y, z, t)] dy dz dt + \\ & [(\rho u_y)(x, y, z, t) - (\rho u_y)(x, y + dy, z, t)] dx dz dt + \\ & [(\rho u_z)(x, y, z, t) - (\rho u_z)(x, y, z + dz, t)] dx dy dt. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Vergelijking (A.1) moet nu dus gelijk zijn aan vergelijking (A.2). Als nu beide vergelijkingen door $dx dy dz dt$ worden gedeeld en van de resultaten de limietovergangen $dx, dy, dz, dt \rightarrow 0$ worden genomen, ontstaat de vergelijking die bekend is onder de naam *continuïteitsvergelijking*. Deze ziet er als volgt uit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0, \quad (\text{A.3})$$

[Tiesinga, 2004].

Vergelijking (A.3) bestaat ook in een tweedimensionale versie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = 0. \quad (\text{A.4})$$

De afleiding van vergelijking (A.4) is volledig analoog aan die van het driedimensionale geval. Hierbij kan worden opgemerkt dat als ρ constant is, vergelijkingen (A.3) en (A.4) overgaan in (A.5) en (A.6), respectievelijk:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.6})$$

In dit geval, waarin de dichtheid constant is, spreken we van een onsamendrukbare vloeistof. [Tiesinga, 2004]

A.2 Wet van behoud van impuls

De tweede behoudswet is de wet van behoud van impuls. Deze kan worden verkregen door de Tweede wet van Newton ($F = ma$) toe te passen op een vloeistofdeeltje in de x -, y - en z -richting. Het achterliggende idee is dat als de som van alle krachten op een vloeistofdeeltje gelijk is aan 0, de impuls p constant is. In formulevorm komt dat neer op:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mv) = 0 \Rightarrow mv = p = \text{constant}.$$

De afleiding van de wet van behoud van impuls gebeurt door het opstellen van een impulsbalans. Daarvoor wordt weer gebruik gemaakt van een volume-elementje zoals in figuur A.1. De Tweede wet van Newton, dus 'massa maal versnelling' met de massa gelijk aan $m = \rho V$, toegepast op de x -richting levert

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} dx dy dz, \quad (\text{A.7})$$

met $\frac{Du_x}{Dt}$ de materiële afgeleide van u_x . Deze kracht moet gelijk zijn aan de som van de drukkracht en de massakracht in de x -richting. De totale drukkracht p in de x -richting is gelijk aan:

$$p(x, y, z, t) dy dz - p(x + dx, y, z, t) dy dz. \quad (\text{A.8})$$

Als de aanname wordt gemaakt dat de totale massakracht wordt gegeven door een vectorfunctie $\mathbf{F}(x, y, z, t)$. Deze vectorfunctie heeft de eenheid $\frac{m}{s^2}$. De massakracht in de x -richting, werkend op het vloeistofdeeltje, wordt nu dus gegeven door $F_1 \rho dx dy dz$. [Hoogstraten, 1997]

Als (A.7) en (A.8) nu door $dx dy dz$ worden gedeeld en vervolgens de limietovergangen hiervan $\rightarrow 0$ worden genomen, dan levert dat in de x -richting

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_1. \quad (\text{A.9})$$

De vergelijkingen voor de y - en z -richting worden op analoge wijze verkregen. Het combineren van deze drie vergelijkingen levert de onderstaande impulsvergelijking:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{F}, \quad (\text{A.10})$$

[Hoogstraten, 1997]. Uiteraard bestaat vergelijking (A.10) ook in een tweedimensionale versie.

Bijlage B

Transformeren en diagonaliseren

Gegeven een 2×2 -matrix A met twee verschillende eigenwaarden zal worden aangetoond dat $A = SAS^{-1}$. Hierin is Λ de matrix met de eigenwaarden van A op de diagonaal. S is de matrix waarvan de kolommen worden gegeven door de bijbehorende eigenvectoren. [Friedberg, 2003]

Om te bewijzen dat A diagonaliseerbaar is en kan worden geschreven als SAS^{-1} , wordt gebruikgemaakt van de volgende definitie:

Definitie. Zij T een lineaire operator over een vectorruimte V en zij λ een eigenwaarde van T . Definieer $E_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\} = \{N(T - \lambda I_V)\}$. De verzameling E_λ wordt de *eigenruimte* van T horend bij de eigenwaarde λ genoemd. Op een soortgelijke manier wordt de eigenruimte van een $n \times n$ -matrix B gedefinieerd als de eigenruimte van L_B .

In bovenstaande definitie is L_B de linkermultiplicatoroperator. Bij A is dus E_{λ_1} gelijk aan v_1 en E_{λ_2} aan v_2 , waarin v_i de eigenvector is horend bij λ_i . [Friedberg, 2003]

Ook wordt de volgende propositie gebruikt.

Propositie. Zij $B \in M_{n \times n}(F)$ en neem aan dat γ een geordende basis is van F^n . Dan geldt dat $[L_B]_\gamma = Q^{-1}BQ$, waarin Q de $n \times n$ -matrix is waarvan de j^e kolom gelijk is aan de j^e vector uit γ [Friedberg, 2003].

Tot slot zal nog gebruik worden gemaakt van onderstaande stelling.

Stelling. Zij T een lineaire operator op een eindigdimensionale vectorruimte V zodanig dat het karakteristieke polynoom van T splitst. Zij $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de verschillende eigenwaarden van T . Dan

(a) T is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als de algebraïsche multipliciteit van λ_i gelijk is aan $\dim(E_{\lambda_i}) \forall i$.

(b) Als T diagonaliseerbaar is and β_i een geordende basis is voor $E_{\lambda_i} \forall i$, dan is $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$ een geordende basis voor V en bestaat deze uit eigenvectoren van T [Friedberg, 2003].

Uit punt b van de stelling volgt nu dat $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ een geordende basis is voor \mathbb{R} , bestaande uit de twee eigenvectoren van A . Bovendien volgt uit de propositie dat $[L_A]_V = S^{-1}AS$, met de j^e kolom van S gelijk aan de j^e vector van V . Echter, $[L_A]_V$ is ook de matrixrepresentatie van A t.o.v. de basis V [Friedberg, 2003]. Met de gegevens

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$$

en

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$$

is deze matrix dus gelijk aan:

$$[L_A]_V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

Omdat S inverteerbaar is, volgt nu uit $\Lambda = S^{-1}AS$ dat $A = S\Lambda S^{-1}$. De basisbeginselen van de lineaire algebra zijn te vinden in *Linear algebra* van Friedberg e.a. [Friedberg, 2003].

Bijlage C

Getal van Froude

Het getal van Froude wordt gedefinieerd als:

$$F = \frac{u}{\sqrt{gh}}$$

Dit is een dimensieloze parameter. Het getal van Froude geeft de verhouding tussen de stroomsnelheid en de snelheid van de oppervlaktegolven (met kleine amplitude) in ondiep water. [Acheson, 2005]

De grootte van het getal van Froude geeft aan of er wel of niet een hydraulische sprong mogelijk is. Zo'n sprong is alleen mogelijk indien er een overgang van een *superkritische* stroming naar een *subkritische* stroming plaatsvindt [Johnson, 1997]. In dit geval ontstaat er plotseling een verhoging van de waterstand [2]. Deze overgang vindt plaats op $F = 1$, wat een *kritische* stroming aangeeft. [3]

In het geval van een superkritische stroming is $F > 1$ en is het ontstaan van een hydraulische sprong mogelijk. Dan is de voortplantingssnelheid van de golven kleiner dan de stroomsnelheid. De golven kunnen nu dus niet tegen de stroom in gaan. [4]

Bij een subkritische stroming is $F < 1$. In dit geval is de voortplantingssnelheid van de golven groter dan de stroomsnelheid en kunnen de golven wel tegen de stroom in. Er kan nu niet een overgang van $F > 1$ naar $F < 1$ plaatsvinden en er kan dus geen sprong ontstaan. [Johnson, 1997]

Bijlage D

MATLAB-programma: hoogtesim.m

Hieronder staat het programma dat bij de hoogtefunctie $h(x, t)$ geschreven is om met deze hoogtefunctie simulaties te kunnen doen. Het programma vereist de volgende invoer:

- een vector x die de punten op de x -as aangeeft waar de hoogte berekend moet worden,
- een vector t die de tijdstippen aangeeft waarop de hoogte berekend moet worden,
- de beginhoogte van de waterkolom h_0 ,
- een 0, 1, of een 2 om aan te geven of het programma niet (0) met experimenten moet vergelijken, of dit wel moet doen (1 of 2).

hoogtesim.m

```
% MATLAB-programma voor het simuleren van een damdoorbraak,  
% door Marije Bakker
```

```
function h = hoogtesim(x,t, h0, sim)  
    % De functie die de hoogte h op tijdstip t en op positie x weergeeft  
    % Door het invullen van een 1 bij 'sim' worden de vectoren x en t  
    % in de vectoren die gebruikt zijn bij het experiment van Martin en  
    % Moyce zodat het verschil tussen de simulatiewaarden en de  
    % experimentele waarden kunnen worden berekend.  
  
    clf  
    g = 9.80665;  
    % De gravitatieconstante, in m/s2,  
    c0 = sqrt(g*h0);  
    % Per definitie is c0 gelijk aan de wortel uit g*h  
  
    a = (9/4) * 0.0254;  
    % Deze a geeft de hoogte van de waterkolom in het experiment  
    %(gevallen sim = 1 en sim = 2)
```

```

if (sim == 1)
    %-----simulatie n.a.v. experiment 1-----
    b = (g/a)^(1/2);

    tau = [0, 0.8, 1.29, 1.74, 2.15, 2.57, 3.08, 4.17, 6.48];
    eta2 = [1.00, 0.89, 0.78, 0.67, 0.56, 0.44, 0.33, 0.22, 0.11];

    y= [-a, -(3/4)*a, -(1/2)*a, -(1/4)*a, 0, a, 2*a];

    for i = 1:9
        eta(i) = eta2(i)*a;
    end

    for i = 1:9
        t2(i) = tau(i)/b;
    end
    h= hoogtesim(y,t2, eta(1), 0);
    for i = 1: 9
        dif(i) = eta(i)-h(i,5);
    end
    abs(dif)
    max(dif)

    figure
    hold on
    p(1) = plot(t2, h(:,5), 'r')
    set(p(1), 'Linewidth', 3);
    p(2) = plot(t2, eta, 'b')
    set(p(2), 'Linewidth', 3);
    legend('Theoretische waarde', 'Experimentele waarde')
    xlabel('tijd t (s)')
    ylabel('hoogte h (m)')

elseif(sim == 2)
    %-----simulatie n.a.v. experiment 2-----
    b = (g/a)^(1/2);
    tau = [0, 0.56, 0.77, 0.93, 1.08, 1.28, 1.46, 1.66, 1.84,
           2.00, 2.21, 2.45, 2.70, 3.06, 3.44, 4.20, 5.25, 7.40];
    eta2 = [1.00, 0.94, 0.89, 0.83, 0.78, 0.72, 0.67, 0.61, 0.56,
           0.50, 0.44, 0.39, 0.33, 0.28, 0.22, 0.17, 0.11, 0.06];

    y= [-a, -(3/4)*a, -(1/2)*a, -(1/4)*a, 0, a, 2*a];

    for i = 1:18
        eta(i) = eta2(i)*2*a;
    end
end

```

```

for i = 1:18
    t2(i) = tau(i)/b;
end
h = hoogtesim(y,t2, eta(1), 0);
for i = 1: 18
    dif(i) = eta(i)-h(i,5);
end
abs(dif)
max(dif)

figure
hold on
p(1) = plot(t2, h(:,5), 'r')
set(p(1), 'Linewidth', 3);
p(2) = plot(t2, eta, 'b')
set(p(2), 'Linewidth', 3);
legend('Theoretische waarde', 'Experimentele waarde')
xlabel('tijd t (s)')
ylabel('hoogte h (m)')

elseif(sim == 0)
%-----lus om hoogte te berekenen-----
for i = 1 : length(t)
    for j = 1: length(x)
        if (x(j) <= -c0*t(i))
            h(i,j) = h0;
        elseif (x(j) <= 2*c0*t(i))
            h(i,j) = (1/(9*g))*(2*c0 - (x(j)/t(i)))^2;
        else
            h(i,j) = 0;
        end
    end
end
end

% In bovenstaande lus wordt de hoogte op het tijdstip t
% op het tijdstip x berekend.

%-----lus om filmpje te maken-----

aantal=length(t);

M=moviein(aantal);

for tel = 1:aantal, % loop over plaatjes

```

```
%clf
hbov = h0 + (0.1*h0);

pS=plot(x, h(tel ,:));
set(pS(1), 'Linewidth', 3);
set(gca, 'XLim', [x(1) x(length(x))], 'Ylim', [0 hbov]);
xlabel('x (m)')
ylabel('hoogte h (m)')

number = sprintf('%04d', tel+1);
naam='sol.';
filmnaam='film';
%eval(['print -djpeg ', naam, number, '.jpg']);
M(:, tel)=getframe(gcf);

end % tel-loop over plaatjes

movie(gcf, M, 10);
else
    fprintf
    ('Dit programma vraagt als vierde parameter een 0, 1 of een 2')
end
```