



Large Eddy Simulatie, een introductie

Sander Huitema



Large Eddy Simulatie, een introductie

Sander Huitema

begeleid door:
Dr. R.W.C.P. Verstappen
University of Groningen
Department of Mathematics
P.O. Box 800
9700 AV Groningen

April 2006

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Waarom is Large eddy simulatie nodig?	4
2.1	De Navier-Stokes vergelijkingen	4
2.2	Het energie cascade proces	5
2.3	Vorticiteits lijnstrekking	9
2.4	Kolmogorov's schalingstheorie	14
3	Large eddy simulatie	17
3.1	De filter operator	17
3.2	De sluitingsparadox	21
3.3	Eddy viscositeits modellen	21
3.4	Regularisatie modellen	24
3.5	Scale similarity modellen	25
	Referenties	28

Het doel van deze scriptie is om een aantal large eddy simulatie methoden toegankelijk te maken voor ouderejaars wiskunde studenten. Als eerste zal de Navier-Stokes vergelijking worden behandeld, die als basis wordt gebruikt voor de andere onderwerpen. Ten tweede wordt het energie cascade proces beschreven dat samen met de vorticeits lijnstrekking als achtergrond voor Kolmogorov's schalingstheorie zal dienen. Deze theorie beschrijft waarom large eddy simulatie nodig is. Tenslotte zal uitgelegd worden wat filteren is en er zullen een drietal typen large eddy modellen worden besproken.

1 Inleiding

Iedereen heeft wel eens aandachtig gekeken naar de stroming van water in bijvoorbeeld een beekje, een sluis, of naar het zog achter een schip. Al snel valt dan het chaotische gedrag hiervan op: er ontstaan op verschillende plaatsen draaikolkjes, deze bewegen zich op een willekeurige manier door de stroming. Dit verschijnsel is een voorbeeld van turbulentie in een stroming. Veel wetenschappers en ingenieurs proberen deze stromingen te beschrijven, te begrijpen, te simuleren en te voorspellen.

De Navier-Stokes vergelijkingen geven een nauwkeurige beschrijving van incompressibele viskeuze turbulente stromingen. Het vinden van een analytische/continue oplossing voor dit stelsel vergelijkingen is in het algemeen helaas niet mogelijk. Bovendien kan er vaak niet worden aangetoond dat er een unieke oplossing bestaat.

Als we toch de stroming willen voorspellen/begrijpen kunnen we proberen een oplossing te benaderen met behulp van de computer. Helaas vragen de directe numerieke simulatie methoden veel reken capaciteit en daarom is het simuleren van stromingen alleen mogelijk voor een klein Reynolds getal (Re). Voor de snelste computers is een Reynolds getal van de orde 10^4 het maximaal haalbare, terwijl voor ingenieurs vaak stromingen met Re 10^8 en 10^9 voorkomen.

De samenhang tussen de beperkte mogelijkheden van directe numeriek simulatie en het Reynolds getal is beschreven door Kolmogorov. Hij toonde aan dat het aantal vrijheidsgraden voor een nauwkeurige simulatie van een stroming ongeveer evenredig is met Re^3 . Als we kijken naar de ontwikkeling van de reken capaciteit van computers, dan kan het nog tientallen jaren duren voordat directe simulatie mogelijk zal zijn voor stromingen met een Reynolds getal met de orde van grote 10^8 of 10^9 .

In de praktijk is het echter meestal niet nodig om het gedrag van de aller-kleinste bewegingen te simuleren, maar is het al voldoende om alleen de 'grote' schaal te doen. Voor ingenieurs is het vaak niet interessant om te weten hoe een klein draaikolkje zich gedraagt, maar gaat het bijvoorbeeld om de kracht die de stroming uitoefend op een voorwerp. Dit heeft er toe geleid dat wiskundigen modellen zijn gaan maken om de Navier-Stokes vergelijkingen te benaderen, zonder de 'kleine' schaal precies te berekenen. Deze modellen staan bekend onder de naam: large eddy simulatie.

2 Waarom is Large eddy simulatie nodig?

2.1 De Navier-Stokes vergelijkingen

De Navier-Stokes vergelijkingen zullen steeds als basis voor de resultaten worden gebruikt. Voor de lezers die minder bekend zijn met de stof zullen de vergelijkingen hier eerst worden beschreven. Er wordt gebruik gemaakt van de volgende notatie: we nemen aan dat het domein, Ω , van het medium (de vloeistof) een open deelverzameling is in de \mathbb{R}^3 met een rand Γ . De snelheidsvector wordt, zoals alle vectoren en matrices vet gedrukt, weergegeven door $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$. In vector notatie worden de Navier-Stokes vergelijkingen voor incompressibele viskeuze media gegeven door:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0 \text{ of } \mathbf{u} \text{ is periodiek,} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Uitgeschreven ziet de eerste component er zo uit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \mathbf{f}_1.$$

Waarbij \mathbf{u}_0 de beginsnelheid is, \mathbf{f} een externe kracht en p de druk. De dichtheid is gelijk aan één gekozen. De ν staat voor de kinematische viscositeit en geeft een maat voor de interne wrijving van het medium. De vergelijking $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (de divergentie) is een direct gevolg van het feit dat we met een incompressibel medium te maken hebben.

In feite staat hier de tweede wet van Newton, $F_r = m \cdot a$. De tijdsafgeleide van de snelheid geeft, met behulp van de kettingregel, de term $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. De resulterende kracht wordt geleverd door het verschil van de druk- de wrijvings- en de externekracht, $\mathbf{f} - \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$. De massa is gelijk aan één genomen. De niet-lineaire term $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ wordt ook wel de convectie genoemd en de wrijvings term, $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ ook wel de diffusie.

Om verschillende stromingen goed met elkaar te vergelijken wordt er vaak naar een dimensieloze Navier-Stokes vergelijking gekeken. Door een karakteristieke lengte- en snelheidsschaal te kiezen kunnen we ervoor zorgen dat voor elke stroming de dimensieloze snelheid en druk alleen nog van het zogenaamde Reynoldsgetal afhangen. Stel we hebben een karakteristieke lengte- en snelheidsschaal, respectievelijk L en U , deze geven samen natuurlijk een tijdschaal: L/U . Voor de druk gebruiken we U^2 als karakteristieke schaal, wat ook logisch is als je de weggelaten tussenstappen hieronder uitwerkt. Definieer dan:

$$\tilde{\mathbf{x}} := \frac{1}{L}(x, y, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad \tilde{\mathbf{u}} := \frac{1}{U}(u, v, w) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}), \quad \tilde{t} := \frac{U}{L}t \quad \text{en} \quad \tilde{p} := \frac{1}{U^2}p.$$

De eerste component van de snelheid kunnen we dan als volgt schalen:

$$u(x, y, z, t) \implies \frac{u}{U} \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, \frac{t}{L} \right) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}).$$

De tijdsafgeleide bijvoorbeeld wordt dan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(U \frac{u}{U} \right) = U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \frac{U}{L} = \frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}.$$

Na het uitwerken van alle componenten blijft dan de dimensieloze Navier-Stokes vergelijking over:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} = 0,$$

waarin $Re = \frac{UL}{\nu}$, een dimensieloze parameter is.

We kunnen ook nog op een andere manier naar dit Reynoldsgetal kijken. Als we aannemen dat er geen druk is en dat de snelheid stationair is, dan blijven er van de Navier-Stokes vergelijking twee termen over:

$$(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} \approx \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}}. \quad (2.2)$$

Het Reynoldsgetal geeft dan dus een verhouding tussen de wrijving en de niet lineaire term, hiervan zullen we later nog gebruik maken.

Bovendien geldt er: als $Re \leq Re_k$, waarbij Re_k staat voor een kritische waarde die afhankelijk is van de soort stroming, dan domineert de wrijving en is de stroming stabiel. Als $Re > Re_k$ dan domineert de niet lineaire term en is de stroming instabiel wat tot een turbulente stroming leidt.

Voor wat de notatie betreft zal niet strikt vast worden gehouden aan de hierboven gebruikte '~ - notatie' voor dimensieloze grootheden. Als er een Reynoldsgetal wordt gebruikt dan is de Navier-Stokes vergelijking al dimensieloos gemaakt.

2.2 Het energie cascade proces

Om meer inzicht te krijgen in de Navier-Stokes vergelijkingen en straks de schalingstheorie van Kolmogorov te kunnen begrijpen zal nu eerst het energie cascade proces worden beschreven. We maken hierbij gebruik van de energiebalans die uit de natuurwetten volgt.

Het idee achter deze theorie is dat er energie kan worden toegevoegd, aan een stroming, op de 'grote' schaal. Deze energie wordt vervolgens getransporteerd door de stroming en daarna onttrokken op de 'kleine' schaal.

Beschouw bijvoorbeeld de toestand van de atmosfeer en in het bijzonder de luchtstromingen: de wind. De energie wordt op de 'grote' schaal toegevoegd, door de zon, en gaat verloren door bijvoorbeeld het bewegen van blaadjes in een boom, de 'kleine' schaal. Om dit wiskundig te laten zien kunnen we gebruik maken van de Fourier-analyse, waardoor we goed onderscheid kunnen maken tussen de verschillende lengteschalen.

Als we het domein Ω beperken tot $(0, L)^3$ en verder aannemen dat de snelheid een uniform convergerende Fourier-reeks heeft, dan kunnen we schrijven:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}},$$

waarbij de frequentie $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ en gegeven wordt door $\boldsymbol{\ell} = 2\pi\mathbf{n}/L$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$. De Fourier-coëfficiënten worden berekend door:

$$\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) = \frac{1}{L^3} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} d\Omega.$$

Als we voor $\|\boldsymbol{\ell}\|_{\infty} = \max_{i=1,2,3} |\ell_i|$ nemen kunnen we als bijbehorende lengteschaal voor deze frequentie $\boldsymbol{\ell}$ definiëren: $2\pi/\|\boldsymbol{\ell}\|_{\infty}$.

Door vervolgens deze Fourier-reeks in de Navier-Stokes vergelijking te substitueren kunnen we een vergelijking afleiden voor elke Fourier-coëfficiënt $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t)$.

Schrijf hiervoor: $\mathbf{u} = (u, v, w) = \left(\sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t), \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{v}(\boldsymbol{\ell}, t), \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{w}(\boldsymbol{\ell}, t) \right) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}}$

en neem $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$.

De 1^e component van de convectie term wordt dan:

$$\begin{aligned} & \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) + \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{v}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \\ & + \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{w}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \\ & = \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}} i \mathbf{k}_1 \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{v}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}} i \mathbf{k}_2 \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ & + \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{w}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}} i \mathbf{k}_3 \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ & = i \sum_{\boldsymbol{\ell}+\mathbf{k}=\mathbf{j}} \mathbf{k}_1 \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t) \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}} + i \sum_{\boldsymbol{\ell}+\mathbf{k}=\mathbf{j}} \mathbf{k}_2 \hat{v}(\boldsymbol{\ell}, t) \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}} \\ & + i \sum_{\boldsymbol{\ell}+\mathbf{k}=\mathbf{j}} \mathbf{k}_3 \hat{w}(\boldsymbol{\ell}, t) \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}} = i \sum_{\boldsymbol{\ell}+\mathbf{k}=\mathbf{j}} (\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) \cdot \mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

en voor de 1^e component van het diffusie deel krijgen we:

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sum_{\boldsymbol{\ell}} \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} &= \\ \nu \sum_{\boldsymbol{\ell}} (i^2 \ell_1^2 + i^2 \ell_2^2 + i^2 \ell_3^2) \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}} &= -\nu \sum_{\boldsymbol{\ell}} \|\boldsymbol{\ell}\|_2^2 \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

De Navier-Stokes vergelijking gaat dan, voor de component $\boldsymbol{\ell}$, in de spectrale ruimte over in:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) + i \sum_{\mathbf{j}+\mathbf{k}=\boldsymbol{\ell}} (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{j}, t) \cdot \mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) + \nu \|\boldsymbol{\ell}\|_2^2 \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\ell}) \right\} e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.3)$$

We moeten hierbij nog wel rekening houden met de divergentie. Er geldt $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, we mogen dus na de Fourier-transformatie niet alle coëfficiënten gebruiken maar alleen die waarvoor geldt:

$$i \sum_{\boldsymbol{\ell}} \ell_1 \hat{u}(\boldsymbol{\ell}, t) + i \sum_{\boldsymbol{\ell}} \ell_2 \hat{v}(\boldsymbol{\ell}, t) + i \sum_{\boldsymbol{\ell}} \ell_3 \hat{w}(\boldsymbol{\ell}, t) = 0.$$

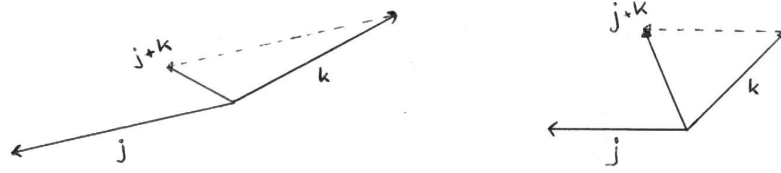
Hieraan wordt natuurlijk voldaan als we de Navier-Stokes vergelijking in de spectrale ruimte projecteren op de deelruimte opgespannen door alle Fourier-coëfficiënten die aan bovenstaande vergelijking voldoen. Dit is een technisch verhaal en zal hier achterwege worden gelaten. Wat opvalt is dat door het projecteren de druk term weg valt en niet meer in vergelijking (2.3) voorkomt.

Er is hier aangenomen dat de kracht \mathbf{f} niet van de tijd afhangt. Bovendien blijkt deze kracht in de praktijk de eigenschap te hebben dat de Fourier-componenten van \mathbf{f} snel kleiner worden als $\|\boldsymbol{\ell}\|_\infty$ groter wordt (dus als de lengteschaal juist kleiner wordt). Dit houdt in dat de energie door \mathbf{f} voornamelijk op de ‘grote’ schaal wordt toegevoegd. We kunnen ook zien dat de factor $\|\boldsymbol{\ell}\|_2^2$ in (3.3) er voor zorgt dat de wrijvings term gaat domineren als de lengteschaal kleiner wordt. We krijgen dan:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) \approx -\nu \|\boldsymbol{\ell}\|_2^2 \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) \implies \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\ell}, t) \sim e^{-\nu \|\boldsymbol{\ell}\|_2^2 t},$$

de snelheid wordt gedempt door de wrijving.

De convectie term doet niet mee aan de energie balans (dit wordt verderop uitgelegd), maar zorgt voor de koppeling tussen de verschillende lengteschalen en dus voor het transport van de energie. Er wordt hierboven gesommeerd over $\mathbf{j} + \mathbf{k} = \boldsymbol{\ell}$. Wat deze koppeling inhoud kunnen we duidelijk zien in figuur 1 hieronder, waar twee verschillende mogelijkheden zijn geïllustreerd. De eerste laat zien dat twee ‘kleine’ lengteschalen opgeteld een ‘grote’ kunnen vormen, de niet-locale interactie. In de tweede blijven de lengteschalen behouden, de locale interactie.



Figuur 1: niet-locale en locale interactie

Nu gaan we zien dat de term $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ de kinetische energie alleen maar door de stroming vervoerd, dus van de grote naar de kleine schaal, en zelf niet deelneemt aan de energie balans. Daarvoor beschouwen we de gemiddelde kinetische energie, vergelijkbaar met de lokale kinetische energie die in het scalaire geval $\frac{1}{2}mv^2$ is. Definiër de gemiddelde kinetische energie in dit geval als volgt:

$$E(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega,$$

waarbij $|\Omega|$ een maat van Ω is, neem bijvoorbeeld: $|\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, d\Omega$. Om te zien hoe deze grootte zich in de tijd gedraagt, differentiëren we:

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right] d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega.$$

Als we vervolgens, gebruikmakend van de Navier-Stokes vergelijking en in bovenstaande integraal $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ vervangen door $-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$ kunnen we zien dat de convectie term de energie niet doet veranderen in de tijd:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \left[(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + uw \frac{\partial u}{\partial z}) \right. \\ &\quad \left. + (uv \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + vw \frac{\partial v}{\partial z}) + (uw \frac{\partial w}{\partial x} + vw \frac{\partial w}{\partial y} + ww \frac{\partial w}{\partial z}) \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Dit kunnen we herschrijven met behulp van $\|\mathbf{u}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2$ als:

$$- \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} v \frac{\partial}{\partial y} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} w \frac{\partial}{\partial z} \|\mathbf{u}\|^2 \right] d\Omega,$$

omdat we te maken hebben met een incompressibel medium, dus $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, geldt er:

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 v \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 w \right) \right] d\Omega \\
&= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \mathbf{u} \right) d\Omega.
\end{aligned}$$

Tenslotte kunnen we met behulp van de divergentie stelling van Gauss en de randvoorwaarde $\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0$ zien dat deze term inderdaad nul is en dus niet bijdraagt aan de verandering van de gemiddelde kinetische energie:

$$= - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0$$

In deze paragraaf hebben we dus gezien dat het vermoeden van toevoer op ‘grote’ schaal en afvoer op ‘kleine’ schaal ook wiskundig uit de Navier-Stokes vergelijkingen volgt. Hoe de convectie term de energie transporteert, wordt in de volgende paragraaf uitgelegd.

2.3 Vorticeits lijnstrekking

Vorticeits lijnstrekking is een benaming voor een verschijnsel dat we allemaal wel kennen. Als je bijvoorbeeld in een kop koffie roert, kun je zien dat er een wervel ontstaat die steeds dieper het kopje in gaat, wordt uitgerekt, en daarbij harder gaat draaien. Er valt op dat de doorsnede van deze wervel hierbij kleiner wordt.

Dit gedrag is rechtstreeks uit de Navier-Stokes vergelijkingen te halen en wordt veroorzaakt door de transporterende term, de convectie. Hiervoor maken we gebruik van de wervelvector $\boldsymbol{\omega}$ die is gedefinieerd als de rotatie van de snelheids vector: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. Om te zien hoe deze rotatie vector zich gedraagt nemen we de rotatie van de hele Navier-Stokes vergelijking:

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \right), \\
&\iff \nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \nabla \times \nabla p - \nabla \times \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{f}.
\end{aligned}$$

Differentiëren naar zowel tijd en plaats is een lineaire operatie en commuteert dan ook met het nemen van een uitproduct. Bovendien is de rotatie van een gradient nul en kunnen we schrijven:

$$\iff \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{f}.$$

De convectie term is niet lineair en levert wat meer problemen op. Om deze te vereenvoudigen maken we gebruik van de volgende identiteit:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{u}\|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u},$$

waarvan, na het nemen van het uitproduct, alleen nog de laatste term, $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$ overblijft. Voor twee vectoren, zeg \mathbf{u} en $\boldsymbol{\omega}$ blijkt in het algemeen, na wat schrijfwerk, te gelden dat:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

In dit geval hebben we te maken met een divergentievrij snelheidsveld, dus $(\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} = 0$. Bovendien is de $\boldsymbol{\omega}$ nu een rotatie vector en er geldt, in het algemeen, dat de divergentie van een rotatie vector nul is, $(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} = 0$. Na substitutie ziet de dynamica van de wervelvector er als volgt uit:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{f},$$

en heeft grote overeenkomst met de Navier-Stokes vergelijking. De derde term is nieuw en kunnen we nog op een andere manier schrijven:

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{D} \boldsymbol{\omega},$$

waarin $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)$ de deformatie matrix wordt genoemd. Deze gelijkheid komt als volgt tot stand:

$$\mathbf{D} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_x + u_x & u_y + v_x & u_z + w_x \\ v_x + u_y & v_y + v_y & v_z + w_y \\ w_x + u_z & w_y + v_z & w_z + w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 \end{pmatrix}.$$

De eerste component hiervan uitgeschreven geeft:

$$\boldsymbol{\omega}_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

met behulp van $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ is dit te schrijven als:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\omega}_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{\omega}_3 + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = \boldsymbol{\omega}_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{\omega}_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{\omega}_3 \frac{\partial u}{\partial z} = 1^e \text{component van } (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

We hebben nu de volgende vergelijking voor $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{D} \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f} \quad (2.4)$$

Deze deformatie matrix, \mathbf{D} , speelt een belangrijke rol in het ‘uitrekken’, de ontwikkeling van een wervel. Om te zien hoe dit in zijn werk gaat beschouwen we eerst de gewone differentiaal vergelijking:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}.$$

Merk op dat \mathbf{D} symmetrisch is, dus diagonaliseerbaar en reële eigenwaarden, zeg λ_1, λ_2 en λ_3 , heeft. Voor extra informatie over de eigenwaarden kunnen we kijken naar het spoor van \mathbf{D} :

$$\text{sp}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i.$$

We mogen aannemen dat $\mathbf{D} \neq 0$, er is dan minstens één positieve eigenwaarde, zeg λ_1 . Na het diagonaliseren hebben we een ontkoppeld systeem van gewone differentiaal vergelijkingen en voor ω_1 geldt, in de nieuwe basis:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = \lambda_1 \omega_1 \quad \implies \quad \omega_1(t) = C e^{\lambda_1 t}.$$

De lengte van de wervelvector $\boldsymbol{\omega}$ neemt dus toe in de tijd, m.a.w. het medium gaat harder draaien. Omdat er logischerwijs ook nog een negatieve eigenwaarde moet zijn, kunnen we zeggen dat er minstens één component van de wervelvector wordt uitgedempd. De richting wordt ook nog veranderd.

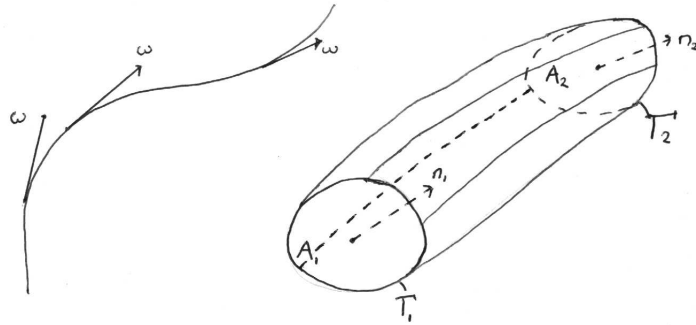
Zolang dus de drie weggelaten termen, $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}$, $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ en $\nabla \times \mathbf{f}$, van vergelijking (2.4) samen niet groot genoeg zijn om dit proces te stoppen zal de wervelvector blijven groeien in de tijd. Uit de behoudswet voor het impuls moment volgt dan dat de doorsnede van deze wervel kleiner moet worden.

Dit kunnen we ook wiskundig zien door gebruik te maken van de begrippen wervellijn en wervelbuis. Een wervellijn is een lijn die overal in het vectorveld aan de wervelvectoren raakt (zie figuur 2). We kunnen dit vergelijken met een stroomlijn, die overal aan het snelheidsveld raakt. Omdat de $\boldsymbol{\omega}$ continu van plaats en tijd afhangt zullen wervellijnen die bij elkaar in de buurt liggen zich ongeveer gelijkaardig gedragen. We kunnen dan een wervelbuis definiëren als een buis waarvan de wanden gevormd worden door wervellijnen (zie figuur 2).

Vervolgens definiëren we de sterkte van zo’n wervel buis als:

$$\kappa := \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dA,$$

waarbij A een willekeurige dwarsdoorsnede is van de wervelbuis. De normaalvector kiezen we in de richting van het vectorveld, zoals aangegeven in figuur 2. Er kan bewezen worden dat de sterkte, κ , constant is langs een wervelbuis. Hiervoor maken we gebruik van de divergentie stelling van Gauss. Definieer daartoe als volume V , met rand ∂V , het gebied ingesloten door A_1, A_2 en de wand van de wervelbuis.



Figuur 2: een wervellijn en een wervelbuis

We kunnen nu zeggen, omdat de divergentie van een rotatievector nul is:

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV = 0.$$

Anderzijds is dit natuurlijk gelijk aan, n.b. denk aan de oriëntatie.:

$$0 = - \iint_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_1 \, dA + \iint_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_2 \, dA + \iint_{\text{wand}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_3 \, dA.$$

Uit de definitie van de wervellijn volgt dat $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_3 = 0$ en houden we dus over:

$$\iint_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_1 \, dA = \iint_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_2 \, dA,$$

waaruit we kunnen concluderen dat de sterkte κ constant is langs een wervelbuis.

Vervolgens kunnen we deze κ ook uitdrukken in een lijnintegraal door gebruik te maken van de stelling van Stokes:

$$\kappa = \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s},$$

waarbij Γ de rand van A is. Hierin kunnen we de circulatie, C , herkennen die Kelvin als volgt definieerde:

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s},$$

met Γ een gesloten materiele kromme, d.w.z. een gesloten kromme die met het medium meebeweegt. Voor deze circulatie leidde Kelvin zijn zogenaamde circulatiethorema af, dat zegt:

$$\frac{dC}{dt} = 0.$$

In andere woorden: de circulatie is voor een materiële kromme constant in de tijd.

Als we nu een gesloten materiële kromme, zeg Γ , in de wand van de wervelbuis kiezen (het oppervlak A_Γ omsloten door deze Γ ligt dan in zijn geheel in de wand), dan is per definitie de circulatie langs deze kromme nul. We hebben immers dat in de wand geldt: $\iint_{A_\Gamma} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA_\Gamma = 0$. Volgens Kelvin's circulatie theorema is dan de circulatie langs deze Γ altijd nul. Dit kan alleen zo zijn als de kromme in de wand van de wervelbuis blijft. Omdat Γ een materiële kromme is, beweegt dus de wervelbuis met de stroming mee.

Om te zien hoe zo'n wervelbuis zich in de tijd gedraagt beschouwen we een dunne wervelbuis in de stroming, zie figuur 3. Op tijdstip t_1 heeft deze een dwarsdoornede δA_1 en een lengte $\delta \ell_1$. Als we deze δA_1 loodrecht kiezen op de richting van het vectorveld kunnen we voor de sterkte van de wervelbuis nemen: $\kappa \approx |\boldsymbol{\omega}|_1 \delta A_1$, waarbij $|\boldsymbol{\omega}|_1$ de lengte is van de wervelvector terplekke van δA_1 .



Figuur 3: een stukje wervel buis op $t = t_1$ en t_2

Uit bovenstaande volgt dat de sterkte van de wervelbuis constant is, dus kunnen we voor tijdstip t_2 schrijven:

$$|\boldsymbol{\omega}|_2 \delta A_2 = |\boldsymbol{\omega}|_1 \delta A_1.$$

Omdat we te maken hebben met een incompressibel medium kunnen we over het volume van het elementje zeggen:

$$\delta A_2 \delta \ell_2 = \delta A_1 \delta \ell_1,$$

waaruit volgt:

$$\frac{|\boldsymbol{\omega}|_1}{|\boldsymbol{\omega}|_2} = \frac{\delta A_2}{\delta A_1} = \frac{\delta \ell_1}{\delta \ell_2}.$$

Samengevat: we kunnen dus zien dat bij toenemende lengte van de wervelvector de doorsnede van de wervelbuis kleiner zal worden en daarbij zal worden uitgerek.

Zoals boven al gezegd, is dit ook wat je na toepassen van de behoudswet voor het impulsmoment verwacht. Dit gedrag staat bekend onder de naam vortcriteitslijnstrekking.

2.4 Kolmogorov's schalingstheorie

We hebben nu gezien hoe de energie binnen de stroming wordt getransporteerd. De energie wordt door de convectie term overgebracht naar de 'kleine' schaal en daar door wrijving, diffusie, omgezet in warmte. Vooral voor numerieke doeleinden is het van groot belang om te weten wat de afmeting is van deze 'kleine' schaal. Als we een rooster in het domein, Ω , willen gebruiken waarop we de Navier-Stokes vergelijking gaan discretiseren, is het natuurlijk van belang dat dit rooster fijn genoeg is om de diffusie ook te berekenen. Anders ontstaat er een systeem waaraan alleen maar energie kan worden toegevoegd.

Voor het bepalen van de verhouding tussen de 'grote' en de 'kleine' schaal heeft Kolmogorov, gebaseerd op een aantal aannames, zijn schalingstheorie ontwikkeld. Om deze te kunnen begrijpen moeten we eerst weten hoe de kinetische energie over de verschillende frequenties ℓ , dus ook over de lengteschalen $2\pi/\|\ell\|_\infty$, is verdeeld. Hiervoor zullen we onze definitie voor de gemiddelde kinetische energie met behulp van de stelling van Parseval schrijven als

$$E(t) = \frac{1}{L^3} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right] d\Omega$$

$$\stackrel{\text{Parseval}}{=} \sum_{\ell} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{u}}(\ell, t)\|^2 \stackrel{\text{notatie}}{=} \sum_k \left\{ \sum_{\|\ell\|_\infty=k} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{u}}(\ell, t)\|^2 \right\}.$$

met $k = 2\pi n/L, n \in \mathbb{N}$. Een verdeling van de energie is daarom als volgt te maken:

$$E(t) = \frac{2\pi}{L} \sum_k E(k, t) \quad \text{waarbij} \quad E(k, t) := \frac{L}{2\pi} \sum_{\|\ell\|_\infty=k} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{u}}(\ell, t)\|^2. \quad (2.5)$$

Als tweede hebben we het tijdsgemiddelde van de energie dissipatie ofwel diffusie nodig, dit zal ϵ worden genoemd. Om hiervoor een maat te bepalen bekijken we de scalaire diffusie vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Door aan beide kanten het inproduct, $u \cdot v := \int_{\Omega} u v \, dx$, met de snelheid te nemen kunnen we een vergelijking voor de verandering van kinetische energie afleiden.

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = u \cdot \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right),$$

$$\iff \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot u) = \nu \int_0^L u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, dx,$$

$$\iff \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|^2 = \underbrace{\nu \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L}_{u=0 \text{ op } \Gamma} - \nu \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx,$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} E \sim \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|^2 = -\nu \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2.$$

Dus energie verlies is evenredig met de norm van de gradient van de snelheid. Dit komt overeen met wat je verwacht: wrijving ontstaat op die plekken in het medium waar de deeltjes langs elkaar bewegen/wrijven. Natuurlijk vindt dit juist plaats daar waar de snelheid verandert.

In drie dimensies net zo, we definiëren:

$$\epsilon := \frac{\nu}{L^3} \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle,$$

waar $\langle \cdot \rangle$ het tijdsgemiddelde aangeeft en de factor $1/L^3$ is toegevoegd om ϵ te kunnen vergelijken met de gemiddelde kinetische energie. De matrixnorm is gedefinieerd als:

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left((\nabla \mathbf{u})_{ij} \right)^2.$$

Zoals boven is beschreven, wordt de energie getransporteerd van de ‘grote’ naar de ‘kleine’ schaal. Omdat er geen energie verloren gaat door wrijving in het gebied tussen deze lengte schalen in, nam Kolmogorov aan dat de energie $E(k)$ niet direkt afhangt van de viscositeit maar alleen van k en ϵ :

$$E(k) \sim \epsilon^a k^b.$$

Gebruikmakend van dimensie relaties tussen de verschillende grootheden ($[L]$ voor lengte, $[T]$ voor tijd):

$$[k] = [L]^{-1}, \quad [\epsilon] = [L]^2 [T]^{-3}, \quad [E(k)] = [L]^3 [T]^{-2},$$

krijgen we $a = \frac{2}{3}$ en $b = -\frac{5}{3}$. Samen geven ze dus de relatie:

$$E(k) \sim C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.6)$$

waarin C_K een dimensieloze constante is.

In onderstaande maken we onderscheid tussen een karakteristieke ‘kleine’ schaal en een karakteristieke ‘grote’ schaal binnen een stroming. In het algemeen is het Reynolds getal gebaseerd op de karakteristieke ‘grote’ schaal.

We gaan nu Kolmogorov’s lengteschaal, λ_K , af leiden. Deze is gedefinieerd als de lengteschaal waarop de traagheids effecten in evenwicht zijn met de viskeuze dissipatie. Deze lengteschaal kan worden gezien als de kleinste actieve schaal in de stroming. Met andere woorden: eigenlijk de kleinste schaal van belang voor de energie vergelijkingen. Het ligt dus voor de hand om λ_K te gebruiken als karakteristieke ‘kleine’ schaal. We kunnen nu natuurlijk ook een

Reynolds getal bepalen dat gebaseerd is op λ_K . Hiervoor kijken we naar vergelijking (2.2), waarin door de schaling de termen $(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}}$ en $\tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}}$ qua orde van grote gelijk zijn aan elkaar. Om het bovenstaande evenwicht, tussen de traagheids effecten en de dissipatie, tot stand te laten komen, kunnen we concluderen dat het Reynolds getal behorende bij deze ‘kleine’ schaal één moet zijn. Daardoor kunnen we Kolmogorov’s lengte schaal bepalen door: $Re = \frac{U_{k_K} \lambda_K}{\nu} \approx 1$, met U_{k_K} de snelheidsschaal behorende bij $k_K = \frac{2\pi}{\lambda_K}$, verkregen door de relatie $U_{k_K} = (k_K E(k_K))^{\frac{1}{2}}$. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} 1 &\approx \frac{U_{k_K} \lambda_K}{\nu} = \frac{\left(k_K C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} k_K^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda_K}{\nu} \\ &= \frac{C_K^{\frac{1}{2}} k_K^{-\frac{1}{3}} \epsilon^{\frac{1}{3}} \lambda_K}{\nu} = \frac{C_K^{\frac{1}{2}} \epsilon^{\frac{1}{3}} \lambda_K^{\frac{4}{3}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}} \nu}, \\ \implies \lambda_K &\approx \tilde{C}_K \nu^{\frac{3}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}} \quad \text{waarbij } \tilde{C}_K = (2\pi)^{\frac{1}{3}} C_K^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tenslotte brengen we Kolmogorov’s lengteschaal in verband met het Reynoldsgetal behorende bij de karakteristieke ‘grote’ schaal. N.B. dit is niet gelijk aan één zoals hierboven is gebruikt. We definiëren, op dezelfde wijze als voor U_{k_K} , de karakteristieke snelheid, U , behorende bij de ‘grote’ schaal als:

$$\frac{1}{2} U^2 := \frac{2\pi}{L} \sum_{k=2\pi/L}^{2\pi/\lambda_K} E(k),$$

vergelijk met (2.5). Dit is met behulp van (2.6) te schrijven als

$$\frac{1}{2} U^2 = \frac{2\pi}{L} \sum_{k=2\pi/L}^{2\pi/\lambda_K} E(k) \approx \epsilon^{\frac{2}{3}} L^{\frac{2}{3}} \implies \epsilon \sim L^{-1} U^3.$$

Uit de definitie van het Reynoldsgetal, $Re = \frac{UL}{\nu}$ en (2.7) volgt:

$$\frac{L}{\lambda_K} \sim Re^{\frac{3}{4}}.$$

Deze relatie wordt veel gebruikt in de numerieke stromingsleer om het aantal vrijheidsgraden te bepalen. In drie dimensies hebben we natuurlijk in elke richting met deze verhouding te maken. De ratio van de karakteristieke tijdschalen is op gelijkaardige manier te bepalen en gedraagt zich als $Re^{\frac{1}{2}}$.

Dit heeft tot gevolg dat het benaderen van een oplossing van de Navier-Stokes vergelijking met een directe numerieke methode alleen zin heeft als het aantal vrijheidsgraden $\sim Re^{\frac{11}{4}}$ wat vaak wordt afgerond naar $\sim Re^3$. In de praktijk heeft men vaak te maken met $Re \sim 10^8$. Dus de Navier-Stokes vergelijking moet dan $\sim 10^{24}$ maal numeriek worden opgelost.

De rekencapaciteit van de huidige computers is nog lang niet groot genoeg om directe numerieke simulatie toe te passen.

Bovenstaande redenering van Kolmogorov is gebaseerd op een aantal aannames, die hij maakte na bestudering van het energie cascade proces en de vorticeitslijnstrekking. Er zijn dan natuurlijk ook vraagtekens te plaatsen bij de manier waarop deze theorie tot stand is gekomen. Hoe dan ook is de relatie $E(k) \sim C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$, die aan de basis ligt, veelvuldig in laboratorium experimenten waargenomen.

In 2001 is deze schalingstheorie, aannemende dat de Navier-Stokes vergelijking een unieke oplossing heeft, ook wiskundig bewezen. Voor een uitwerking hiervan verwijs ik naar: C. Foias, O. Manley, R. Rosa en R. Temam. Estimates for the Energy Cascade in Three Dimensional Turbulent Flows. *C.R. Acad. Sci. Paris*. (Serié I, 2001).

3 Large eddy simulatie

Om toch een oplossing te vinden met behulp van de computer wordt er geprobeerd om de Navier-Stokes vergelijkingen aan te passen. De bedoeling is dat er een nieuw systeem van vergelijkingen ontstaat dat beter te benaderen is, terwijl het ongeveer dezelfde eigenschappen heeft, qua energiebalans, druk en snelheidsveld, als het oude systeem.

In de large eddy simulatie, LES, wordt er in het snelheidsveld onderscheid gemaakt tussen de ‘grote’ (de large eddies) en de ‘kleine’ lengteschalen. De snelheid kan dan worden uitgedrukt als $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_k$ waarin \mathbf{u}_g en \mathbf{u}_k respectievelijk de ‘grote’ en de ‘kleine’ lengteschalen bevatten. Vervolgens wordt er geprobeerd een stelsel van vergelijkingen af te leiden waarin alleen nog de ‘grote’ schalen voorkomen. Omdat het aantal ‘grote’ schalen veel kleiner is dan het aantal ‘kleine’ blijft er een systeem over wat te benaderen is met veel minder vrijheidsgraden.

Zoals uit de Fourier-analyse m.b.t. de convectie-term is gebleken, zijn alle lengteschalen aan elkaar gekoppeld en dus niet onafhankelijk te berekenen. Deze ‘nieuwe’ vergelijking die zo ontstaat is in feite de Navier-Stokes vergelijking zelf met een nieuwe term. Hierin wordt het weglaten van de interacties tussen de ‘grote’ en de ‘kleine’ lengteschalen gecompenseerd. Zie ook figuur 1 waarin de niet lokale interactie is weergegeven. Het maken van een goed model voor de extra term staat bekend als het ‘sluitingsprobleem’.

3.1 De filter operator

Large eddy simulatie maakt gebruik van een ‘filterlengte’, die de kleinste lengteschaal aangeeft die nog wordt berekend. De schalen boven die filterlengte worden grote of supergrid schaal genoemd en de andere kleine of subgrid schaal. Dit onderscheid kunnen we wiskundig maken door een operator te laten werken op het snelheidsveld, waarna alleen de grote lengte schalen over blijven.

Deze filter operator wordt gegeven door een convolutie produkt:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) := (\phi * G)(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) d\tau d\mathbf{y},$$

waarin G , de convolutie kern, karakteristiek is voor het filter en afhangt van de filterlengte in plaats en tijd.

Om een filter ook daadwerkelijk te kunnen gebruiken eisen we dat het aan een aantal eigenschappen voldoet:

1. behoud van constante

$$\bar{c} = c \iff \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{y}, \tau) d\tau d\mathbf{y} = 1,$$

2. lineair

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi},$$

3. commuteren met differentiatie in zowel plaats als tijd

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial \phi}{\partial s}}, \quad s = \mathbf{x}, t.$$

Als we dit filter op de snelheidsvector toepassen krijgen we de volgende decompositie:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t),$$

waarin $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u} * G)(\mathbf{x}, t)$ dus de grote (supergrid) schalen bevat en $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ de overgebleven kleine (subgrid) schalen representeerd.

Hieronder worden twee voorbeelden van filters getoond die voor de eenvoud alleen ruimtelijk werken. Om duidelijk te maken wat ze precies doen met de verschillende lengteschalen zullen we ze ook in de spectrale ruimte beschouwen. Hiervoor maken we gebruik van de Fourier-transformatie, \mathcal{F} , met $\hat{\mathbf{u}} := \mathcal{F}(\mathbf{u})$:

$$\mathcal{F}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathcal{F}(\mathbf{u} * G) = \mathcal{F}(\mathbf{u}) \mathcal{F}(G) \iff \hat{\bar{\mathbf{u}}} = \hat{\mathbf{u}} \hat{G},$$

Per Fourier-coëfficiënt krijgen we dan, gebruik als notatie $\hat{\mathbf{u}}_{\ell} := \hat{\mathbf{u}}(\ell, t)$:

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\mathbf{u}}}_{\ell} &= \hat{G}_{\ell} \hat{\mathbf{u}}_{\ell}, \\ \iff \hat{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\ell} \hat{G}_{\ell} \hat{\mathbf{u}}_{\ell} e^{i\ell \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned}$$

De Fourier-coëfficiënten van de snelheidsvector worden dus vermenigvuldigd met de bijbehorende coëfficiënten van het filter.

In één dimensie hebben we, met Δ de filterlengte, bijvoorbeeld:

- Gauss filter:

$$G(y) = \left(\frac{\gamma}{\pi\Delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\gamma y^2}{\Delta^2}\right),$$

$$\hat{G}(\ell) = \exp\left(\frac{-\Delta^2\ell^2}{4\gamma}\right),$$

waarin γ een willekeurige parameter is.

- Sharp cutoff filter:

$$G(y) = \frac{\Delta}{\pi y} \sin\left(\frac{\pi y}{\Delta}\right),$$

$$\hat{G}(\ell) = \begin{cases} 1 & \text{als } |\ell| \leq \pi/\Delta, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

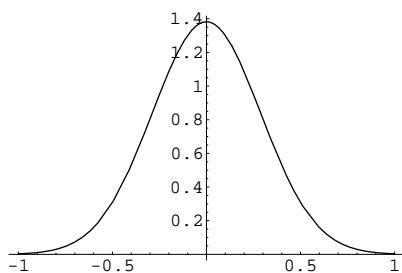


Fig. 4: Gauss filter in de fysische ruimte

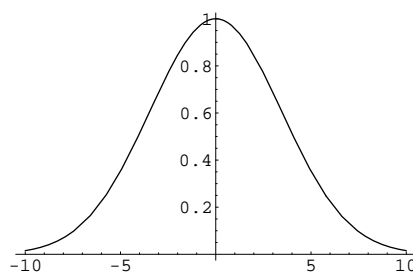


Fig. 5: Gauss filter in de spectrale ruimte

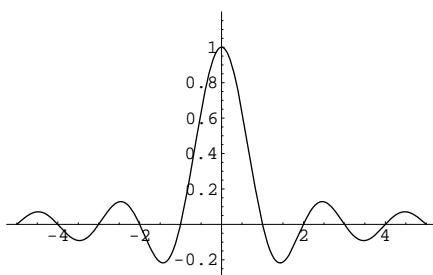


Fig. 6: Sharp cutoff filter in de fysische ruimte

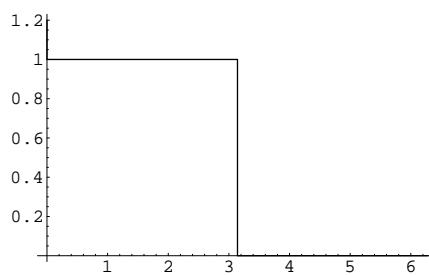


Fig. 7: Sharp cutoff filter in de spectrale ruimte

In de figuren is $\Delta = 1$ en $\gamma = 6$ gekozen. Het sharp cutoff filter wordt hier als voorbeeld gebruikt omdat het een goed aansluit bij het idee achter de LES, het onderscheid tussen groot en klein. De lengteschalen behorend bij $|\ell| > \pi$ worden er duidelijk uitgefilterd. Omdat er zo veel informatie wordt ‘weggegooid’, die nuttig kan zijn bij het opstellen van een goed model, wordt dit type filter niet vaak gebruikt. In de praktijk worden vaak filters gebruikt die deze informatie behouden. Vaak is het niet zo gemakkelijk om te zien hoe ze dan precies werken, zoals bijvoorbeeld het Gauss filter.

We gaan vervolgens de filter operatie los laten op de hele Navier-Stokes vergelijking. Het is daarvoor handig om deze eerst in een ander vorm te schrijven, gebruik de volgende notatie: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ en $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Dit geeft de volgende vergelijking, waarbij we per component i moeten sommeren over $j = 1, 2, 3$.

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_i} = \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right). \quad (3.1)$$

De eerste component wordt bijvoorbeeld, $i = 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_1} \\ &= \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_2} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_3} + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_1} \right) \right\}, \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{x}_2} + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_3} \right) + \mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_2} + \mathbf{u}_3 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_3} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_1} \\ &= \nu \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_3^2} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{x}_2} + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_3} \right) \right\}, \end{aligned}$$

waarin we, met behulp van $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, de eerste component van de Navier-Stokes vergelijking herkennen. Na het filteren van (3.1) krijgen we dan (gebruik eigenschappen 1,2 en 3 van het filter):

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (\overline{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{u}}_j) + \frac{\partial \overline{p}}{\partial \mathbf{x}_i} = \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right). \quad (3.2)$$

Het doel was een vergelijking over te houden die alleen nog de grote schalen bevat. Alleen de tweede term hierboven voldoet hier nog niet aan. Om het geheel nog wat anders te schrijven kunnen we natuurlijk $\overline{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{u}}_j = \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} + \overline{\mathbf{u}_i} \overline{\mathbf{u}_j} - \overline{\mathbf{u}_i} \overline{\mathbf{u}_j}$ substitueren:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (\overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j}) + \frac{\partial \overline{p}}{\partial \mathbf{x}_i} = \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (\overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} - \overline{\mathbf{u}_i} \overline{\mathbf{u}_j}).$$

De laatste term, de zogenaamde subgrid matrix, bevat als enige nog kleine schalen. Deze subgrid matrix wordt veel gebruikt en in het algemeen genoteerd door: $\mathbb{T}_{i,j} := \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} - \overline{\mathbf{u}_i} \overline{\mathbf{u}_j}$. De boedeling is nu om \mathbb{T} uit te drukken in de grote schalen. Dit wordt ook wel het sluitingsprobleem genoemd.

3.2 De sluitingsparadox

Het lijkt voor de hand liggend om een zo precies mogelijk sluitings model te maken. Het blijkt zelfs mogelijk te zijn de subgrid matrix exact uitdrukken in de grote schalen. Voorwaarde daarvoor is dan wel dat de filter operator een isomorfisme moet zijn, zoals bijvoorbeeld het Gauss filter is.

Om te kunnen zien dat een isomorfisme voldoende is voor exacte sluiting, beschouwen we de hierboven afgeleide relatie tussen Fourier-coëfficiënten van de gefilterde snelheid en de convolutie kern:

$$\hat{\mathbf{u}}_\ell = \hat{G}_\ell \hat{\mathbf{u}}_\ell.$$

Als we te maken hebben met een isomorfisme G dan geldt:

$$\hat{G}_\ell \neq 0 \quad \forall \ell \quad \iff \quad \hat{\mathbf{u}}_\ell = \frac{1}{\hat{G}_\ell} \hat{\mathbf{u}}_\ell.$$

We hebben dan in de spectrale ruimte:

$$\overline{\hat{\mathbf{u}}_\ell \hat{\mathbf{u}}_\ell} = \frac{1}{\hat{G}_\ell^2} \hat{\mathbf{u}}_\ell^2,$$

waardoor we natuurlijk direct in vergelijking (3.2) de term $\overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j}$ in $\overline{\mathbf{u}}_i$ en $\overline{\mathbf{u}}_j$ kunnen uitdrukken.

Er kan echter worden aangetoond dat er dan ook een isomorfisme bestaat tussen de oplossingen van het nieuwe systeem van differentiaal vergelijkingen en de oorspronkelijke oplossingen. We kunnen dan dus verwachten dat het aantal vrijheidsgraden dat nodig is om het gefilterde systeem te benaderen gelijk is aan dat van de Navier-Stokes vergelijking zelf! Exacte sluiting levert dus eigenlijk niets op, voor details wordt verwezen naar [1].

3.3 Eddy viscositeits modellen

Na het filteren hebben we dus het volgende systeem van vergelijkingen over:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \overline{\mathbf{u}} + \nabla \overline{p} - \nu \nabla^2 \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{f}} - \nabla \cdot \mathbb{T}, \\ \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0, \\ \overline{\mathbf{u}}|_\Gamma = 0 \text{ of } \overline{\mathbf{u}} \text{ is periodiek,} \\ \overline{\mathbf{u}}|_{t=0} = \overline{\mathbf{u}}_0. \end{cases}$$

Waarbij de divergentie van een matrix een vector geeft met in elke component de divergentie van de bijbehorende rij van de matrix.

Er is onderscheid te maken tussen verschillende typen sluitings modellen. Het eerste model dat we hier behandelen valt onder de zogenaamde eddy viscositeits modellen. Deze hebben hun naam te danken aan het feit dat er aan het viskeuze deel van de vergelijking, $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$, een niet lineaire term, een matrix met niet lineaire coëfficiënten, wordt toegevoegd.

Het model voor de subgrid matrix, \mathbb{T} , wordt hier aangeduid met een \mathbb{M} . De algemene vorm voor de eddy viscositeits modellen is dan te schrijven als:

$$\mathbb{M} = \nu_{eddy} \overline{\mathbf{D}},$$

waarin de gefilterde deformatie matrix wordt gebruikt, $\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^t)$.

Het tot stand komen van deze vorm voor het model is gebaseerd op de volgende relatie voor de diffusie term:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nu (\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}) = \nu (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)) = \nu (\nabla \cdot (2\mathbf{D})).$$

Het idee is dus om het tekort aan diffusie in de gefilterde Navier-Stokes vergelijkingen, door het weglaten van de kleine schalen, te compenseren door een gelijkaardige term. Natuurlijk ontbreekt een wiskundige onderbouwing voor dit model, wel kunnen er bepaalde eigenschappen aan worden toegekend zoals hieronder wordt beschreven.

Het meest bekende model voor de large eddy simulatie is dat van Smagorinsky en is van dit type:

$$\mathbb{M} = \delta^2 |\overline{\mathbf{D}}| \overline{\mathbf{D}} \quad \text{met} \quad |\overline{\mathbf{D}}|^2 := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \overline{\mathbf{D}}_{ij} \overline{\mathbf{D}}_{ij}.$$

Dit model hangt af van een nog te bepalen constante δ , die vaak wordt gerelateerd aan de filterlengte.

Als de Navier-Stokes vergelijkingen worden gediscrètiseerd kunnen we deze δ ook aan de maaswijdte, zeg h , koppelen: $\delta = c_s h$. Deze maaswijdte hangt natuurlijk ook weer af van de filterlengte, door de schalingstheorie van Kolmogorov. We willen immers het aantal vrijheidsgraden terugdringen tot het oplossen met de computer weer redelijkerwijs mogelijk is. Hiertoe moeten we een bepaalde hoeveelheid ‘wegfilteren’ door een geschikte filterlengte te kiezen. De constante c_s kan dan zo gekozen worden dat het model tijdens de simulatie de cascade hypothese van Kolmogorov, $E(k) \sim C_k \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$, reproduceert.

Door gebruik te maken van bepaalde eigenschappen waar de subgrid matrix aan voldoet, kunnen we ook nog op een andere manier een waarde voor c_s bepalen. Als we de produkt operator, S , definiëren als $S(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) := \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j$ en de filter operator aanduiden met L krijgen we:

$$\mathbb{T}_{ij} = \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} - \overline{\mathbf{u}_i} \overline{\mathbf{u}_j} = L(S(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)) - S(L(\mathbf{u}_i), L(\mathbf{u}_j)) := [L, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j),$$

met $[\cdot, \cdot]$ het zogenaamde Lie-haakje. Dit haakje voldoet onder andere aan de identiteit van Jacobi:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0,$$

waarin f, g en h drie operatoren zijn.

Maak nu gebruik van een tweede filter, vaak wordt hiervoor hetzelfde filter gekozen maar dan met een andere filterlengte. Noem de twee filter operatoren L_1 en L_2 en neem aan dat ze commuteren, we hebben dan:

$$[L_1, [L_2, S]] + [L_2, [S, L_1]] + [S, [L_1, L_2]] = 0.$$

Doordat ze commuteren hebben we de eigenschap $[L_1, L_2] = 0$ en valt de laatste term weg. Als we nu $[L_2, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ vervangen door het Smagorinsky model, zeg $\mathbb{M}_2(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, en de andere term net zo: $[S, L_1](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = -[L_1, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \approx \mathbb{M}_1(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$. Dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} & [L_1, [L_2, S]](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) + [L_2, [S, L_1]](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = L_1([L_2, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)) \\ & - [L_2, S](L_1(\mathbf{u}_i), L_1(\mathbf{u}_j)) - L_2([L_1, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)) + [L_1, S](L_2(\mathbf{u}_i), L_2(\mathbf{u}_j)) \approx \\ & - \{ \mathbb{M}_1(L_2(\mathbf{u}_i), L_2(\mathbf{u}_j)) + \mathbb{M}_2(L_1(\mathbf{u}_i), L_1(\mathbf{u}_j)) \} = - \{ \mathbb{M}_1(\tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j) + \mathbb{M}_2(\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{u}}_j) \}. \end{aligned}$$

Want

$$L_1([L_2, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)) - L_2([L_1, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)) = 0,$$

wederom omdat L_1 en L_2 commuteren. Hierboven zijn $L_1(\mathbf{u}_i)$ en $L_2(\mathbf{u}_i)$ vervangen door respectievelijk: $\bar{\mathbf{u}}_i$ en $\tilde{\mathbf{u}}_i$.

Zowel \mathbb{M}_1 als \mathbb{M}_2 hangen van c_s af. Als we nu een geschikte norm kiezen, bijvoorbeeld de matrixnorm $|\cdot|$ zoals hierboven is gedefinieerd, dan kunnen we een optimale waarde voor c_s afleiden door deze te minimaliseren (de bedoeling is om aan de identiteit van Jacobi te voldoen):

$$\min_{c_s} |\mathbb{M}_1(c_s) + \mathbb{M}_2(c_s)| \implies (c_s)_{opt}.$$

Bovenstaande methode voor de bepaling van c_s staat bekend als het dynamisch model van Germano.

Om wat houvast te hebben tijdens het ontwikkelen van een model kan er gebruik gemaakt worden van de bevindingen van Ladyženskaja. Zij stelde een aantal voorwaarden op voor de niet lineaire viskeuze matrix, \mathbb{M} , die garanderen dat het systeem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} - \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}} - \nabla \cdot \mathbb{M}, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \\ \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma} = 0 \text{ of } \bar{\mathbf{u}} \text{ is periodiek,} \\ \bar{\mathbf{u}}|_{t=0} = \bar{\mathbf{u}}_0, \end{array} \right.$$

een unieke zwakke oplossing heeft.

Bovendien kan er bewezen worden dat voor $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ de rij oplossingen (\mathbf{u}_δ) van bovenstaand systeem een deelrij bevat die convergeert, in zwakke zin, naar een zwakke oplossing van de Navier-Stokes vergelijking.

Het model van Smagorinsky voldoet aan de voorwaarden van Ladyženskaja en leidt dus in ieder geval tot een stelsel met een unieke zwakke oplossing.

3.4 Regularisatie modellen

Een ander type is het regularisatiemodel, dit ontstaat door de Navier-Stokes vergelijking te regulariseren en daarna te filteren. Als voorbeeld beschouwen we de zogenaamde Leray regularisatie en de manier waarop hiermee een sluitingsmodel wordt gevormd.

Het algemene idee van regulariseren is, het aanpassen van een vergelijking, indien nodig, zodat er bijvoorbeeld aangetoond kan worden dat er een unieke oplossing bestaat. Als we dit proberen voor de Navier-Stokes vergelijking dan komt dit neer op het aanpassen van de niet-lineaire term:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla}) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0.$$

De Navier-Stokes vergelijking werd door Leray als volgt geregulariseerd.

Neem voor $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^3$ de bol met straal ϵ vanuit de oorsprong en neem een rij van positieve, begrensde functies $(\phi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ met de volgende eigenschappen:

$$\phi_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty, \quad \text{dr}(\phi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \phi_\epsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + ((\phi_\epsilon * \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, & (3.3) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} \text{ is periodiek,} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \phi_\epsilon * \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

Hij bewees dat bovenstaand systeem voor alle $\epsilon > 0$ een unieke \mathcal{C}^∞ oplossing heeft en dat bovendien voor $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ de oplossing convergeert naar een zwakke oplossing van de Navier-Stokes vergelijking.

Omdat er door Leray een convolutie produkt is gebruikt (dat bovendien aan de voorwaarden op blz. 18 voldoet), kunnen we de ϕ_ϵ ook opvatten als kern voor een filter, noteer $\tilde{\mathbf{u}} = \phi_\epsilon * \mathbf{u}$. Als we vervolgens vergelijking (3.3) nog een keer filteren met een tweede filter, zeg $\bar{\mathbf{u}} = \mathcal{H}(\mathbf{u})$, waarvan we eisen dat het een isomorfisme is met inverse, \mathcal{H}^{-1} :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla}) \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} p - \nu \bar{\nabla}^2 \bar{\mathbf{u}} = 0.$$

Dit kunnen we schrijven als:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{p} - \nu \bar{\nabla}^2 \bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} - \overline{(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}},$$

als we vervolgens \mathbf{u} vervangen door $\mathcal{H}^{-1}(\bar{\mathbf{u}})$ hebben we het volgende model afgeleid:

$$\nabla \cdot \mathbb{T} \approx \nabla \cdot \mathbb{M} = \overline{(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathcal{H}^{-1}(\bar{\mathbf{u}})} - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}.$$

3.5 Scale similarity modellen

Het laatste model dat hier als voorbeeld zal worden gegeven valt onder het type scale similarity modellen. Dit type is gebaseerd op twee aannames. De eerste is dat de kleinste supergrid schaal qua structuur gelijk is aan de grootste subgrid schaal. Dit kunnen we zien door een filter, bijvoorbeeld het Gauss filter, twee maal toe te passen. Als we de subgrid schalen, $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$, nog een keer filteren houden we de grootste subgrid schalen over:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \implies \overline{\mathbf{u}'}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t).$$

Net zo houden we, na nog een keer filteren van $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, de grootste supergrid schalen over. Als we die nu weer aftrekken van $\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)$ dan houden we de kleinste supergrid schalen over en kunnen we zien dat ze gelijk zijn aan de grootste subgrid schalen:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t).$$

Ten tweede wordt aangenomen dat de subgrid schaal die net onder de filterlengte zit de grootste invloed heeft op de supergrid schaal.

Op grond van bovenstaande aannames ontwikkelde Bardina een sluitingsmodel dat het basis model voor de scale similarity modellen is:

$$\mathbb{T}_{ij} = \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} - \bar{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{u}}_j \sim \overline{\bar{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{u}}_j} - \bar{\bar{\mathbf{u}}}_i \bar{\bar{\mathbf{u}}}_j = \mathbb{M}_{ij}.$$

Gebruikmakend van de notatie zoals hierboven met het Lie-haakje:

$$\mathbb{T}_{ij} = [L, S](\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \implies \mathbb{M}_{ij} = [L, S](\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{u}}_j).$$

Wat Bardina feitelijk deed is de term $\overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} = \overline{(\bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u}_i')(\bar{\mathbf{u}}_j + \mathbf{u}_j')}$ vervangen door: $\overline{(\bar{\mathbf{u}}_i)(\bar{\mathbf{u}}_j)}$, de andere term op dezelfde manier.

De scale similarity modellen vallen weer onder een grotere klasse van modellen, de zogenaamde approximate deconvolution modellen. Deze klasse is gebaseerd op het meest voor de hand liggende waar je aan kunt denken bij het opstellen van een model. De subgrid matrix wordt uitgedrukt in $\bar{\mathbf{u}}$ door op de plekken waar \mathbf{u} nog voorkomt deze te vervangen door de inverse van het filter los te laten op $\bar{\mathbf{u}}$. Gebruik nogmaals de notatie $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ en neem aan dat \mathcal{H} een inverse heeft, dan kunnen we schrijven:

$$\mathbb{T}_{ij} = \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} - \bar{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{u}}_j = \overline{\mathcal{H}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}_i) \mathcal{H}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}_j)} - \bar{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{u}}_j.$$

Er doen zich hier echter twee problemen voor. Ten eerste moeten we de inverse \mathcal{H}^{-1} kunnen bepalen. Als deze bekend is, hebben we hier dan ook nog eens te maken met een exact sluitingsmodel. Zoals uit de sluitingsparadox volgt, schieten we daar niks mee op.

Deze twee problemen lossen elkaar in feite op. Het idee is om \mathcal{H}^{-1} te benaderen waardoor we vervolgens geen exacte sluiting meer hebben en dus een

bruikbaar model kunnen overhouden. We gaan hierbij als volgt te werk: Beschouw in één dimensie de Taylor reeks van $u(y)$ om het punt x en neem voor de eenvoud aan dat u niet tijdsafhankelijk is. Bovendien wordt aangenomen dat de snelheid voldoende vaak differentieerbaar is:

$$u(y) = u(x) + (y-x)\frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}(y-x)^2\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \dots$$

Als we deze reeks vervolgens substitueren in het convolutie produkt:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y)G(x-y) dy = u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)G(x-y) dy + \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2 G(x-y) dy + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^n G(x-y) dy + \dots \end{aligned}$$

$$\iff \bar{u}(x) = u(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^{(j)}}{j!} \frac{\partial^j u(x)}{\partial x^j},$$

waarbij $\beta^{(j)}$ staat voor het j -de orde moment van de convolutie kern:

$$\beta^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^j G(x-y) dy.$$

Vervolgens kiezen we een filter waarvoor we de momenten kunnen afschatten, neem bijvoorbeeld het Gauss filter. Als j oneven is dan is $\beta^{(j)} = 0$ want de convolutie kern is even (dus de integrand oneven) en het integratie gebied is symmetrisch ten opzichte van de oorsprong. Als j even is, geldt er:

$$\beta^{(j)} = \mathcal{O}(\Delta^j),$$

want bijvoorbeeld voor $j = 2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(\frac{-x^2}{d^2}\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}d^3 \quad \text{als } \text{Re}(d) > 0.$$

Als we de momenten kunnen afschatten hebben we dus:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= u(x) + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \Delta^j \frac{\partial^j u(x)}{\partial x^j} = \left(Id + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \Delta^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \right) u(x) \\ \iff u(x) &= \left(Id + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \Delta^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \right)^{-1} \bar{u}(x). \end{aligned}$$

Door vervolgens de reeks af te breken bij de orde p en de formele relatie $(1 + K)^{-1} = 1 - K + K^2 - K^3 + \dots = 1 - K + \mathcal{O}(K^2)$ hierop toe te passen, krijgen we als benadering voor de inverse, \mathcal{H}^{-1} :

$$u(x) = \mathcal{H}^{-1}\bar{u}(x) \approx \left(Id - \sum_{j=1}^p C_j \Delta^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \right) \bar{u}(x).$$

N.B. houdt er rekening mee dat bovenstaande geen garantie geeft voor een benaderende inverse maar slechts een formele redenering is. Er kan natuurlijk altijd gebruik gemaakt worden van de gevonden relatie als deze wel een benadering oplevert.

Alle scale similarity modellen kunnen op deze manier worden uitgedrukt. In het bijzonder krijgen we het model van Bardina als we filteren met het Gauss filter en een tweede orde ($p = 2$) benadering gebruiken:

$$\bar{u} = u + C_2 \Delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

en vervolgens de inverse bepalen zoals hierboven.

Referenties

- [1] J.-L. Guermond, J.T. Oden and S.Prudhomme. Mathematical Perspectives on Large Eddy Simulation Models for Turbulent Flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. (nr. 6, 2004)
- [2] F.T.M. Nieuwstadt. Notes and Exercises Accompanying the Lecture Series Advanced Fluid Mechanics b56A. *Studiedictaat Technische Universiteit Delft*.
- [3] F.T.M. Nieuwstadt. Dictaat bij het College Turbulentie A. *Studiedictaat Technische Universiteit Delft*. (1989)
- [4] H.W. Hoogstraten. Stromingsleer. *Studiedictaat Rijksuniversiteit Groningen*. (1997)
- [5] D. Drikakis and B.J. Geurts. Turbulent Flow Computation. *Kluwer Academic Publishers*. (2002)
- [6] P. Sagaut. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. *Springer-Verlag*. (2001)