



Periodical volume

Mathematische Zeitschrift - 32

in: Periodical

801 page(s)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion.

Von

B. L. van der Waerden in Groningen¹⁾.

Es sei $f_n(x)$ der Betrag der Differenz der reellen Zahl x mit dem nächstbenachbarten n -stelligen Dezimalbruch:

$$f_n(x) = \min_{(m \text{ ganz})} |x - m \cdot 10^{-n}|.$$

Behauptung. Die Funktion

$$(1) \quad f(x) = \sum_1^{\infty} f_n(x) \quad ^2)$$

ist überall stetig und besitzt nirgends eine endliche Ableitung.

Beweis (von Dr. A. Heyting). $f_n(x)$ ist eine stetige Funktion von x (es ist nämlich $|f_n(y) - f_n(x)| \leq |y - x|$). Wegen $f_n(x) < 10^{-n}$ konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig; daher stellt sie eine stetige Funktion von x dar.

Nun sei x eine beliebige, als Dezimalbruch dargestellte, reelle Zahl. Ist die q -te Stelle von x gleich 4 oder 9, so setzen wir $y = x - 10^{-q}$,

¹⁾ Das Beispiel wurde vom Verfasser zuerst in den „Wiskundige Opgaven“ des „Wiskundig genootschap“ 15, H. 1 (1930) publiziert. Die von Herrn Dr. A. Heyting eingesandte Lösung war viel einfacher als mein ursprünglicher Beweis. Einen im wesentlichen übereinstimmenden Beweis sandte auch Herr Dr. H. H. Buzeman ein.

²⁾ Diese Funktion ist ein Spezialfall einer von K. Knopp (Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 18) betrachteten Funktion

$$\sum_1^{\infty} \alpha^n \psi(b^n x).$$

Der Knoppsche Beweis der Nichtdifferenzierbarkeit stimmt aber nur für $\alpha b > 4$, während oben $\alpha b = 1$ ist (die „Zacken“ der Summanden $f_n(x)$ werden nicht steiler, während sie bei Knopp immer steiler werden). Dafür hat auch die Knoppsche Funktion nirgends eine unendliche Ableitung, während die obige Funktion $f(x)$ z. B. für $x = \frac{1}{3} = 0,333\dots$ die Ableitung $+\infty$ hat.

sonst $y = x + 10^{-q}$. Dann sind für $n < q$ die zu x und y nächstliegenden n -stelligen Dezimalbrüche dieselben, und x und y liegen auf derselben Seite dieses Bruches (er wird nämlich gefunden durch Abbruch der Dezimalbruchentwicklung nach der n -ten Stelle und Addition einer Einheit zur n -ten Stelle, falls die $(n + 1)$ -ste Stelle ≥ 5 war). Mithin gilt für $n < q$:

$$f_n(y) - f_n(x) = \pm (y - x).$$

Für $n \geq q$ gilt aber:

$$f_n(y) - f_n(x) = 0,$$

mithin ist

$$f(y) - f(x) = s(y - x),$$

wo s eine ganze Zahl darstellt, die für gerades q ungerade und für ungerades q gerade ist. Der Differenzenquotient s nimmt also in jeder Umgebung der Stelle x sowohl gerade als ungerade ganzzahlige Werte an; daraus folgt die Nichtexistenz einer endlichen Ableitung.

Bemerkung. Die Funktion $f(x)$ besitzt auch keine rechtsseitige endliche Ableitung (und ebenso keine linksseitige). Das ergibt sich aus folgendem Hilfssatz: Besitzt eine Funktion $f(x)$ eine endliche Rechtsableitung $f'_r(x)$, so ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 2h) - f(x + h)}{h} = f'_r(x).$$

Beweis.

$$\frac{f(x + 2h) - f(x + h)}{h} = 2 \frac{f(x + 2h) - 2f(x)}{2h} - \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \rightarrow 2f'_r(x) - f'_r(x).$$

Setzt man, um den Hilfssatz auf unsere Funktion $f(x)$ anzuwenden, $h = 10^{-q}$, so ergibt der obige Beweis, wenn die q -te Stelle von x keine 4 oder 9 ist:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \pm s,$$

dagegen im Ausnahmefall, wenn die q -te Stelle eine 4 oder 9 ist:

$$\frac{f(x + 2h) - f(x + h)}{h} = \pm s.$$

Man erhält also in jedem Fall für $q = 1, 2, 3, \dots$ eine Folge von abwechselnd geraden und ungeraden Zahlen, die gegen $f'_r(x)$ konvergieren müßte, was nicht geht.

(Eingegangen am 20. Mai 1930.)