Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion.

Von

B. L. van der Waerden in Groningen[1]).

Es sei $f_n(x)$ der Betrag der Differenz der reellen Zahl x mit dem nächstbenachbarten n-stelligen Dezimalbruch:

$$f_n(x) = \min_{(m \text{ ganz})} |x - m \cdot 10^{-n}|.$$

Behauptung. Die Funktion

$$f(x) = \sum_1^\infty f_n(x) \quad (1)$$ [2])

ist überall stetig und besitzt nirgends eine endliche Ableitung.

Beweis (von Dr. A. Heyting). $f_n(x)$ ist eine stetige Funktion von x (es ist nämlich $|f_n(y) - f_n(x)| \leqq |y - x|$). Wegen $f_n(x) < 10^{-n}$ konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig; daher stellt sie eine stetige Funktion von x dar.

Nun sei x eine beliebige, als Dezimalbruch dargestellte, reelle Zahl. Ist die q-te Stelle von x gleich 4 oder 9, so setzen wir $y = x - 10^{-q}$,

---

[1]) Das Beispiel wurde vom Verfasser zuerst in den „Wiskundige Opgaven" des „Wiskundig genootschap" 15, H. 1 (1930) publiziert. Die von Herrn Dr. A. Heyting eingesandte Lösung war viel einfacher als mein ursprünglicher Beweis. Einen im wesentlichen übereinstimmenden Beweis sandte auch Herr Dr. H. H. Buzeman ein.

[2]) Diese Funktion ist ein Spezialfall einer von K. Knopp (Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 18) betrachteten Funktion

$$\sum_1^\infty a^n \psi(b^n x).$$

Der Knoppsche Beweis der Nichtdifferenzierbarkeit stimmt aber nur für $ab > 4$, während oben $ab = 1$ ist (die „Zacken" der Summanden $f_n(x)$ werden nicht steiler, während sie bei Knopp immer steiler werden). Dafür hat auch die Knoppsche Funktion nirgends eine unendliche Ableitung, während die obige Funktion $f(x)$ z. B. für $x = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ die Ableitung $+\infty$ hat.

sonst $y = x + 10^{-q}$. Dann sind für $n < q$ die zu x und y nächstliegenden n-stelligen Dezimalbrüche dieselben, und x und y liegen auf derselben Seite dieses Bruches (er wird nämlich gefunden durch Abbruch der Dezimalbruchentwicklung nach der n-ten Stelle und Addition einer Einheit zur n-ten Stelle, falls die $(n+1)$-ste Stelle $\geqq 5$ war). Mithin gilt für $n < q$:

$$f_n(y) - f_n(x) = \pm (y - x).$$

Für $n \geqq q$ gilt aber:

$$f_n(y) - f_n(x) = 0,$$

mithin ist

$$f(y) - f(x) = s(y - x),$$

wo s eine ganze Zahl darstellt, die für gerades q ungerade und für ungerades q gerade ist. Der Differenzenquotient s nimmt also in jeder Umgebung der Stelle x sowohl gerade als ungerade ganzzahlige Werte an; daraus folgt die Nichtexistenz einer endlichen Ableitung.

Bemerkung. Die Funktion $f(x)$ besitzt auch keine rechtsseitige endliche Ableitung (und ebenso keine linksseitige). Das ergibt sich aus folgendem Hilfssatz: Besitzt eine Funktion $f(x)$ eine endliche Rechtsableitung $f_r'(x)$, so ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = f_r'(x).$$

Beweis.

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 2\frac{f(x+2h) - 2f(x)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to 2f_r'(x) - f_r'(x).$$

Setzt man, um den Hilfssatz auf unsere Funktion $f(x)$ anzuwenden, $h = 10^{-q}$, so ergibt der obige Beweis, wenn die q-te Stelle von x keine 4 oder 9 ist:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \pm s,$$

dagegen im Ausnahmsfall, wenn die q-te Stelle eine 4 oder 9 ist:

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = \pm s.$$

Man erhält also in jedem Fall für $q = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge von abwechselnd geraden und ungeraden Zahlen, die gegen $f_r'(x)$ konvergieren müßte, was nicht geht.

(Eingegangen am 20. Mai 1930.)