university of groningen

faculty of science and engineering

What is Stochastic Geometry?

Gilles Bonnet

March 1st 2024, **L**ecture **E**ntertainment **S**eries, Groningen

What is Probability?

(a) Joseph Bertrand (1822-1900)

CALCUL

DES

PROBABILITÉS.

CHAPITRE I.

ÉNUMÉRATION DES CHANCES.

On estime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables divisé par le nombre des cas possibles. La difficulté ne consiste que dans l'énumération des cas.

LAPLACE.

1. Définition de la probabilité. L'égalité des chances est supposée dans la définition. — 2. Exemple d'une énumération incorrecte. — 3. Autre exemple. — 4. Le nombre des cas ne doit pas être infini. Contradiction résultant de l'oubli de cette condition. — 5. Second exemple. — 6. Troisième exemple. — 7. Quatrième exemple. — 8, 9, 10, 11, 12, 13. Solution de quelques problèmes par l'énumération des chances. — 14. Prétendu paradoxe du chevalier de Méré. — 15. Combien faut-il tenter de coups pour obtenir une probabilité donnée de produire au moins une fois un événement dont la probabilité est connue? — 16. Problème du jeu de rencontre. — 17. Problème relatif aux tirages de boules numérotées sans les remettre après chaque tirage. — 18. Problème relatif au dépouillement d'un scrutin de ballottage. — 19. Une urne contient des boules numérotées, quelle est la probabilité pour que sur n tirages la somme des points tirés ait une valeur donnée. — 20. Application au cas de trois dés.

1. La probabilité d'un événement est estimée par l'énumération des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles.

On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$. C'est une définition.

B. 1

(b) Calcul des probabilités (1889)

(a) Joseph Bertrand (1822-1900)

CALCUL

DES

PROBABILITÉS.

CHAPITRE I.

ÉNUMÉRATION DES CHANCES.

On estime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables divisé par le nombre des cas possibles. La difficulté ne consiste que dans l'énumération des cas.

1. Définition de la probabilité. L'égalité des chances est supposée dans la définition. — 2. Exemple d'une énumération incorrecte. — 3. Autre exemple. — 4. Le nombre des cas ne doit pas être infini. Contradiction résultant de l'oubli de cette condition. — 5. Second exemple. — 6. Troisième exemple. — 7. Quatrième exemple. — 8, 9, 10, 11, 12, 13. Solution de quelques problèmes par l'énumération des chances. — 14. Prétendu paradoxe du chevalier de Méré. — 15. Combien faut-il tenter de coups pour obtenir une probabilité donnée de produire au moins une fois un événement dont la probabilité est connue? — 16. Problème du jeu de rencontre. — 17. Problème relatif aux tirages de boules numérotées sans les remettre après chaque tirage. — 18. Problème relatif au dépouillement d'un scrutin de ballottage. — 19. Une urne contient des boules numérotées, quelle est la probabilité pour que sur n tirages la somme des points tirés ait une valeur donnée. — 20. Application au cas de trois dés.

1. La probabilité d'un événement est estimée par l'énumération des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles.

On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$. C'est une définition.

B. 1

(b) Calcul des probabilités (1889)

5. On trace *au hasard* une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit?

(d) For those who can read one of the most beautiful languages in the world.

(a) Joseph Bertrand (1822-1900)

CALCUL DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE I.

ÉNUMÉRATION DES CHANCES.

1. Définition de la probabilité. L'égalité des chances est supposée dans la définition. — 2. Exemple d'une énumération incorrecte. — 3. Autre exemple. — 4. Le nombre des cas ne doit pas être infini. Contradiction résultant de l'oubli de cette condition. — 5. Second exemple. — 6. Troisième exemple. — 7. Quatrième exemple. — 8, 9, 10, 11, 12, 13. Solution de quelques problèmes par l'énumération des chances. — 14. Prétendu paradoxe du chevalier de Méré. — 15. Combien faut-il tenter de coups pour obtenir une probabilité donnée de produire au moins une fois un événement dont la probabilité est connue? — 16. Problème du jeu de rencontre. — 17. Problème relatif aux tirages de boules numérotées sans les remettre après chaque tirage. — 18. Problème relatif au dépouillement d'un scrutin de ballottage. — 19. Une urne contient des boules numérotées, quelle est la probabilité pour que sur n tirages la somme des points tirés ait une valeur donnée. — 20. Application au cas de trois dés.

1. La probabilité d'un événement est estimée par l'énumération des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles.

On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$. C'est une définition.

B. 1

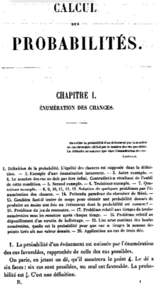
(b) Calcul des probabilités (1889)

"Consider an equilateral triangle inscribed in a circle. Suppose a chord of the circle is chosen at random. What is the probability that the chord is longer than a side of the triangle?"

5. On trace *au hasard* une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit?

(d) For those who can read one of the most beautiful languages in the world.

(a) Joseph Bertrand (1822-1900)



CALCUL
DES
PROBABILITÉS.

CHAPITRE I.
ÉNUMÉRATION DES CHANCES.

1. La probabilité d'un événement est estimée par l'énumération des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles.

On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$. C'est une définition.

(b) Calcul des probabilités (1889)

“Consider an equilateral triangle inscribed in a circle. Suppose a chord of the circle is chosen at random. What is the probability that the chord is longer than a side of the triangle?”

Please answer: **pollev.com/proba**

5. On trace *au hasard* une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit?

(d) For those who can read one of the most beautiful languages in the world.

What is probability?...Bertrand's paradox

university of groningen

On peut dire : si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$.

On peut dire aussi : si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition, égale à $\frac{1}{2}$.

On peut dire encore : choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble, par définition, égale à $\frac{1}{4}$.

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

Figure: 3 answers!

CHAP. I. — ÉNUMÉRATION DES CHANCES. 5

On peut dire : si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$.

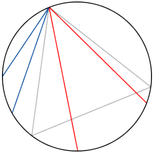
On peut dire aussi : si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition, égale à $\frac{1}{2}$.

On peut dire encore : choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble, par définition, égale à $\frac{1}{4}$.

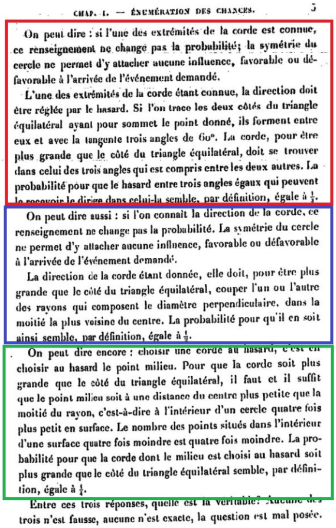
Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

Figure: 3 answers!



2 random points on the circle.

Probability $= 1/3$



CHAP. I. — ÉNUMÉRATION DES CHANCES. 5

On peut dire : si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

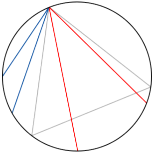
L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$.

On peut dire aussi : si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition, égale à $\frac{1}{2}$.

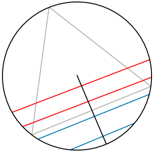
On peut dire encore : choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble, par définition, égale à $\frac{1}{4}$.

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.



2 random points on the circle.

Probability $= 1/3$

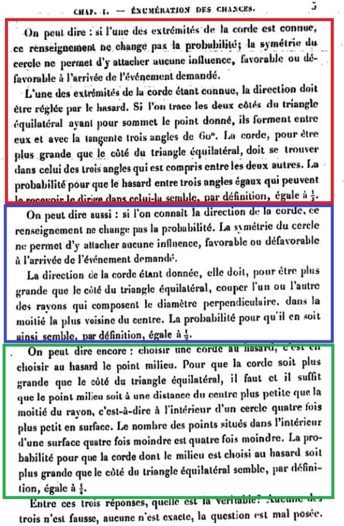


1 random angle and 1 random distance to the center.

Probability $= 1/2$

Figure: 3 answers!

What is probability?...Bertrand's paradox



CHAP. I. — ÉNUMÉRATION DES CHANCES. 5

On peut dire : si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$.

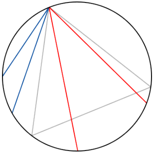
On peut dire aussi : si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition, égale à $\frac{1}{2}$.

On peut dire encore : choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble, par définition, égale à $\frac{1}{4}$.

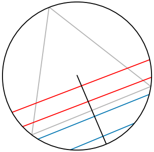
Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

Figure: 3 answers!



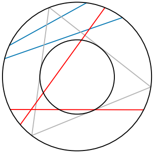
2 random points on the circle.

Probability $= 1/3$



1 random angle and 1 random distance to the center.

Probability $= 1/2$



1 random midpoint in the disc.

Probability $= 1/4$

Buffon’s Needle

Buffon's needle problem: An old *recreational* problem

DES SCIENCES. 43

GEOMETRIE.

CEtte année M. le Clerc de Buffon préſenta à l'Académie des Solutions de Problemes qui regardoient le Jeu du franc Carreau. On jette en l'air dans une Chambre carrelée de Carreaux égaux & ſuppoſés réguliers, un Ecu, un Louis, & on demande combien il y a à parier que la Piéce ne tombera que ſur un ſeul Carreau, ou *franchement*. Il s'eſt fait de très-profondes & de très-curieuſes recherches ſur différents paris, différentes probabilités, mais elles ſont toutes purement numériques, c'eſt-à-dire, qu'elles ne conſiſtent qu'en des combinaiſons de Nombres, & ne ſortent point d'une Arithmétique fort élevée. La queſtion préſente eſt d'une eſpece nouvelle, en ce qu'elle appartient à la Géométrie, & aux figures qui n'étoient point encore entrées dans cette matiére.

Il ſaute aux yeux que plus la Piéce ſera petite par rapport à un des Carreaux égaux, plus il y aura à parier qu'elle tombera franchement. Ainſi dans ce Carreau donné que l'on ſuppoſe quarré, M. le Clerc inſcrit un autre quarré toûjours éloigné des bords du Carreau de la longueur du demi-diametre de l'Ecu ou du Louis, & il eſt clair que la probabilité que la Piéce tombera franchement ſera à la probabilité contraire comme la ſuperficie du petit quarré inſcrit ſera à celle de l'eſpece de bordure intérieure ou de *couronne* que ce petit quarré forme dans le Carreau, car la Piéce ne ſera dans le cas de ne point tomber franchement que quand elle tombera de façon que ſon centre ſoit ſur la ſuperficie de cette couronne, puiſqu'alors, vû la grandeur connuë de ſon demi-diametre, elle débordera néceſſairement le Carreau.

Il ſuit de-là que pour jouer à jeu égal, ce qui eſt toûjours en ces matiéres le but des Problemes comme l'équilibre en Méchanique, il faut que la ſuperficie du quarré inſcrit, & celle

F ij

44 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

de la couronne du Carreau, ſoient égales, & quand cela eſt, le demi-diametre de la Piéce eſt incommenſurable au côté du Carreau, & un peu plus de ſa 6me partie. S'il n'étoit préciſément que cette 6me partie, le jeu commenceroit déja à avoir quelque légere inégalité.

Sur quelque point du Carreau que s'applique le centre d'une Piéce ronde, il eſt déterminé dans le moment ſi elle tombe franchement ou non. Mais ce ne ſeroit pas la même choſe pour une Piéce quarrée, ſon centre étant toûjours poſé ſur le même point de la ſuperficie du Carreau, s'il n'eſt qu'à une certaine diſtance de ſes bords, elle pourra ou tomber ou ne tomber pas franchement. Ce ſera le 1er ſi les côtés de la Piéce quarrée ſont paralleles à ceux du Carreau, & le 2d s'ils ne le ſont pas, alors elle débordera le Carreau par quelqu'une de ſes 4 pointes. La Piéce ronde a toûjours, en vertu de ſa figure, la même poſition par rapport aux côtés du Carreau, mais non pas la Piéce quarrée, & la probabilité de ne pas tomber franchement eſt beaucoup plus grande pour cette Piéce quarrée que pour la ronde, tout le reſte étant d'ailleurs égal.

Pour ne point entrer dans une Géométrie aſſés fine, où ce ſujet a conduit M. le Clerc, qui ne demandoit pas mieux que d'y être conduit, nous nous contenterons de donner par un des Problemes qu'il a réſolus, une idée de ce que peuvent faire ici les différentes poſitions où tombe une Piéce qu'on jette.

Sur un plancher qui n'eſt formé que de planches égales & paralleles, on jette une Baguette d'une certaine longueur, & qu'on ſuppoſe ſans largeur. Quand tombera-t-elle franchement ſur une ſeule planche?

Ce ſera d'abord quand elle tombera dans une poſition parallele à la longueur ou côté de la planche ſur laquelle elle tombe, mais ce ſera encore dans beaucoup d'autres poſitions. Que l'on conçoive le point du milieu de la Baguette à une certaine diſtance du bord de la planche, & que ſur ce point comme centre elle décrive un quart de Cercle par ſon extrémité la moins éloignée de ce bord, elle décrira une partie de

DES SCIENCES. 45

cet Arc au dedans de la planche, & l'autre partie au dehors, & autant qu'elle aura de poſitions au dedans, autant aura-t-elle de chûtes franches, & au contraire. Par conſéquent le nombre de ſes chûtes franches ſera à celui des autres comme la ſomme de ſes poſitions *intérieures* à la ſomme des *extérieures*, ou, ce qui eſt la même choſe, comme les deux portions de l'aire du quart de Cercle, dont l'une eſt en dedans, l'autre au dehors de la planche.

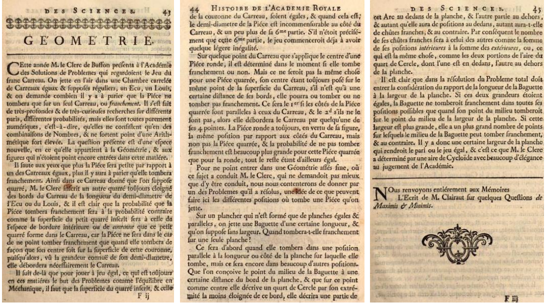
Il eſt clair que dans la réſolution du Probleme total doit entrer la conſidération du rapport de la longueur de la Baguette à la largeur de la planche. Si ces deux grandeurs étoient égales, la Baguette ne tomberoit franchement dans toutes ſes poſitions poſſibles que quand ſon point du milieu tomberoit ſur le point du milieu de la largeur de la planche. Si cette largeur eſt plus grande, elle a un plus grand nombre de points ſur leſquels le milieu de la Baguette peut tomber franchement, & au contraire. Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendroit le pari ou le jeu égal, & c'eſt ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d'élégance au jugement de l'Académie.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires L'Ecrit de M. Clairaut ſur quelques Queſtions *de Maximis & Minimis*.

F iij

(a) Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, 1707-1788

(b) de l'Acad. Roy. des. Sciences (1733), 43–45



DES SCIENCES. 43

GEOMETRIE.

CEtte année M. le Clerc de Buffon préſenta à l'Académie des Solutions de Problemes qui regardoient le Jeu du franc Carreau. On jette en l'air dans une Chambre carrelée de Carreaux égaux & ſuppoſés réguliers, un Ecu, un Louis, & on demande combien il y a à parier que la Piéce ne tombera que ſur un ſeul Carreau, ou *franchement*. Il s'eſt fait de très-profondes & de très-curieuſes recherches ſur différents paris, différentes probabilités, mais elles ſont toutes purement numériques, c'eſt-à-dire, qu'elles ne conſiſtent qu'en des combinaiſons de Nombres, & ne ſortent point d'une Arithmétique fort élevée. La queſtion préſente eſt d'une eſpece nouvelle, en ce qu'elle appartient à la Géométrie, & aux figures qui n'étoient point encore entrées dans cette matiére.

Il ſaute aux yeux que plus la Piéce ſera petite par rapport à un des Carreaux égaux, plus il y aura à parier qu'elle tombera franchement. Ainſi dans ce Carreau donné que l'on ſuppoſe quarré, M. le Clerc inſcrit un autre quarré toûjours éloigné des bords du Carreau de la longueur du demi-diametre de l'Ecu ou du Louis, & il eſt clair que la probabilité que la Piéce tombera franchement ſera à la probabilité contraire comme la ſuperficie du petit quarré inſcrit ſera à celle de l'eſpece de bordure intérieure ou de *couronne* que ce petit quarré forme dans le Carreau, car la Piéce ne ſera dans le cas de ne point tomber franchement que quand elle tombera de façon que ſon centre ſoit ſur la ſuperficie de cette couronne, puiſqu'alors, vû la grandeur connuë de ſon demi-diametre, elle débordera néceſſairement le Carreau.

Il ſuit de-là que pour jouer à jeu égal, ce qui eſt toûjours en ces matiéres le but des Problemes comme l'équilibre en Méchanique, il faut que la ſuperficie du quarré inſcrit, & celle

F ij

44 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

de la couronne du Carreau, ſoient égales, & quand cela eſt, le demi-diametre de la Piéce eſt incommenſurable au côté du Carreau, & un peu plus de ſa 6me partie. S'il n'étoit préciſément que cette 6me partie, le jeu commenceroit déja à avoir quelque légere inégalité.

Sur quelque point du Carreau que s'applique le centre d'une Piéce ronde, il eſt déterminé dans le moment ſi elle tombe franchement ou non. Mais ce ne ſeroit pas la même choſe pour une Piéce quarrée, ſon centre étant toûjours poſé ſur le même point de la ſuperficie du Carreau, s'il n'eſt qu'à une certaine diſtance de ſes bords, elle pourra ou tomber ou ne tomber pas franchement. Ce ſera le 1er ſi les côtés de la Piéce quarrée ſont paralleles à ceux du Carreau, & le 2d s'ils ne le ſont pas, alors elle débordera le Carreau par quelqu'une de ſes 4 pointes. La Piéce ronde a toûjours, en vertu de ſa figure, la même poſition par rapport aux côtés du Carreau, mais non pas la Piéce quarrée, & la probabilité de ne pas tomber franchement eſt beaucoup plus grande pour cette Piéce quarrée que pour la ronde, tout le reſte étant d'ailleurs égal.

Pour ne point entrer dans une Géométrie aſſés fine, où ce ſujet a conduit M. le Clerc, qui ne demandoit pas mieux que d'y être conduit, nous nous contenterons de donner par un des Problemes qu'il a réſolus, une idée de ce que peuvent faire ici les différentes poſitions où tombe une Piéce qu'on jette.

Sur un plancher qui n'eſt formé que de planches égales & paralleles, on jette une Baguette d'une certaine longueur, & qu'on ſuppoſe ſans largeur. Quand tombera-t-elle franchement ſur une ſeule planche?

Ce ſera d'abord quand elle tombera dans une poſition parallele à la longueur ou côté de la planche ſur laquelle elle tombe, mais ce ſera encore dans beaucoup d'autres poſitions. Que l'on conçoive le point du milieu de la Baguette à une certaine diſtance du bord de la planche, & que ſur ce point comme centre elle décrive un quart de Cercle par ſon extrémité la moins éloignée de ce bord, elle décrira une partie de

DES SCIENCES. 45

cet Arc au dedans de la planche, & l'autre partie au dehors, & autant qu'elle aura de poſitions au dedans, autant aura-t-elle de chûtes franches, & au contraire. Par conſéquent le nombre de ſes chûtes franches ſera à celui des autres comme la ſomme de ſes poſitions *intérieures* à la ſomme des *extérieures*, ou, ce qui eſt la même choſe, comme les deux portions de l'aire du quart de Cercle, dont l'une eſt en dedans, l'autre au dehors de la planche.

Il eſt clair que dans la réſolution du Probleme total doit entrer la conſidération du rapport de la longueur de la Baguette à la largeur de la planche. Si ces deux grandeurs étoient égales, la Baguette ne tomberoit franchement dans toutes ſes poſitions poſſibles que quand ſon point du milieu tomberoit ſur le point du milieu de la largeur de la planche. Si cette largeur eſt plus grande, elle a un plus grand nombre de points ſur leſquels le milieu de la Baguette peut tomber franchement, & au contraire. Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendroit le pari ou le jeu égal, & c'eſt ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d'élégance au jugement de l'Académie.

NOus renvoyons entiérement aux Mémoires L'Ecrit de M. Clairaut ſur quelques Queſtions *de Maximis & Minimis*.

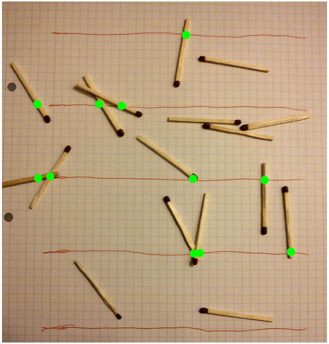
F iij

(a) Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, 1707-1788

(b) de l'Acad. Roy. des. Sciences (1733), 43–45

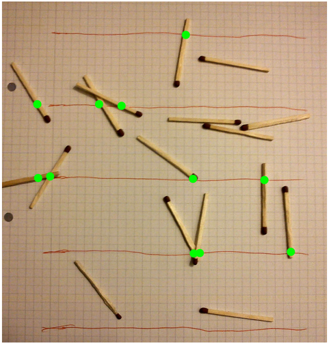
Suppose we have a floor made of parallel strips of wood, each the same width, and we drop a needle onto the floor. What is the probability that the needle will lie across a line between two strips?

Oups! The match boxes has fallen!

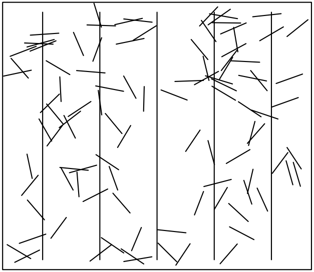


(c) Buffon's ~~needle~~ match problem

Oups! The match boxes has fallen!

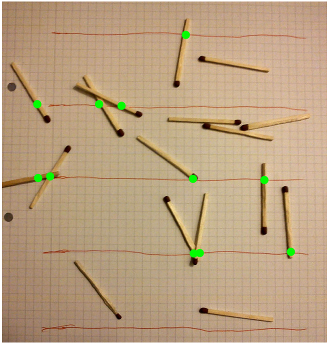


(c) Buffon's ~~needle~~ match problem

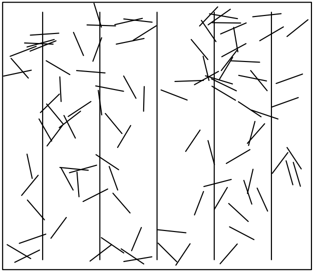


31 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 31 %

(d) Computer simulations



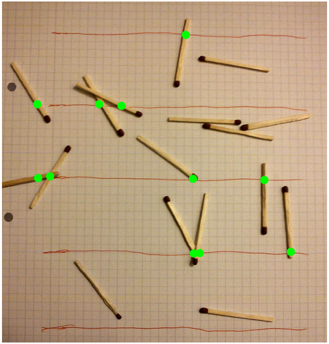
(c) Buffon's ~~needle~~ match problem



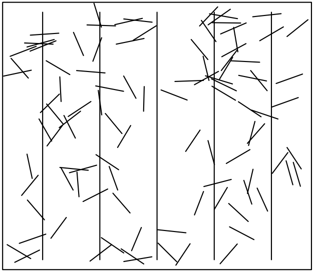
31 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 31 %

(d) Computer simulations

- Is 31% a good estimation of the *real* probability?



(c) Buffon's ~~needle~~ match problem

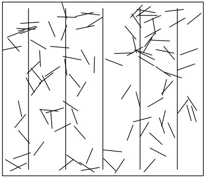


31 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 31 %

(d) Computer simulations

- ▷ Is 31% a good estimation of the *real* probability?
- ▷ If I throw again 100 needles, will I see again 31% of needles crossing a line?

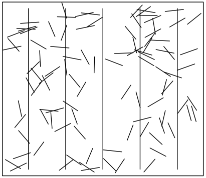
I ran out of matches. But luckilly I have a computer.



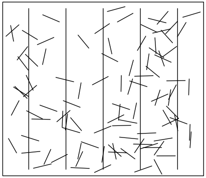
31 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 31 %

(e) Is it 31% ?

I ran out of matches. But luckilly I have a computer.



31 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 31 %

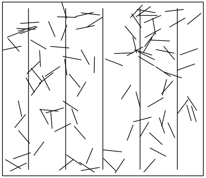


33 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 33 %

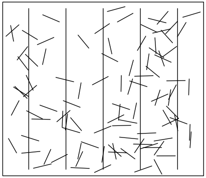
(e) Is it 31% ?

(f) 33%?

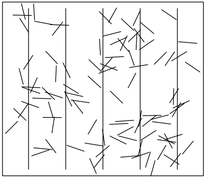
I ran out of matches. But luckilly I have a computer.



31 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 31 %



33 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 33 %



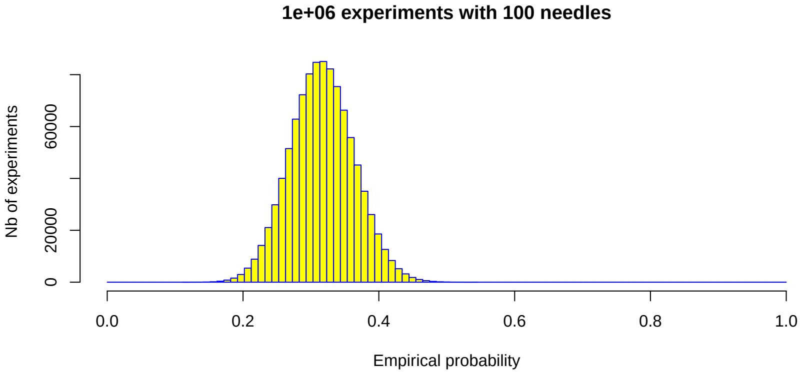
36 out of 100 needles are crossing
Empirical probability = 36 %

(e) Is it 31% ?

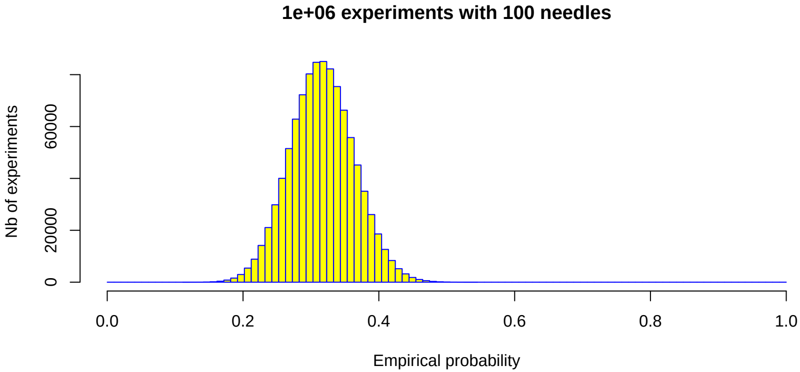
(f) 33%?

(g) or 36%

A million experiments!

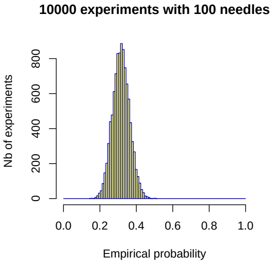


A million experiments!

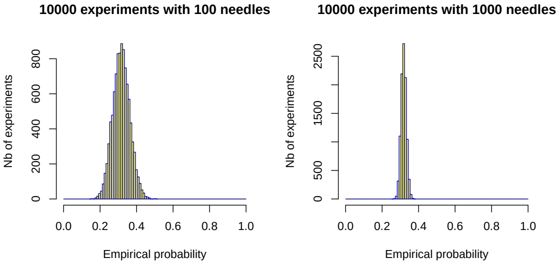


- We need to throw more needles!

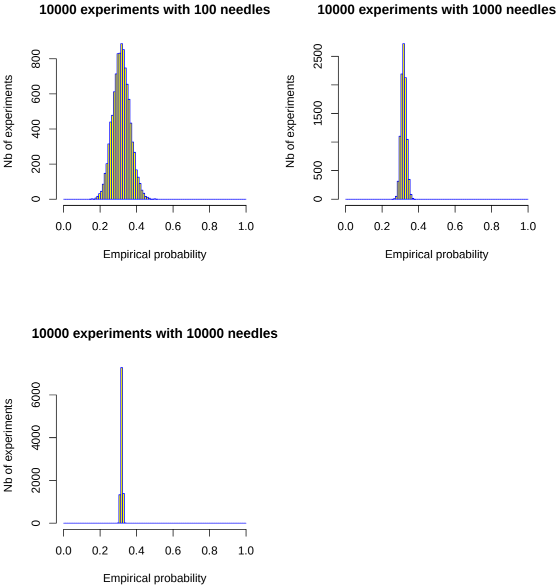
How many needles do we need?



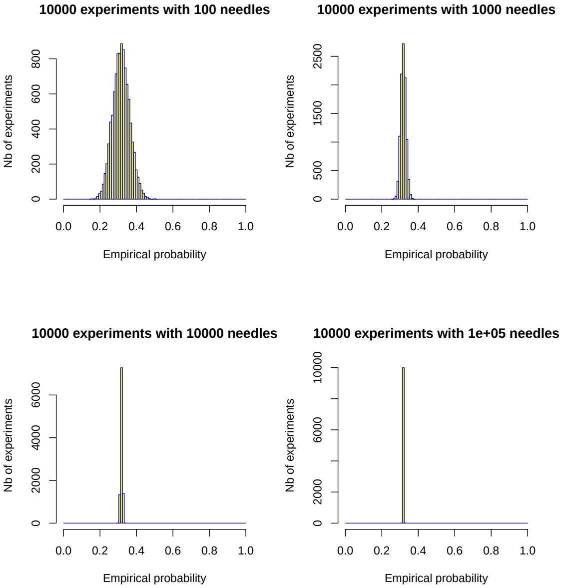
How many needles do we need?



How many needles do we need?



How many needles do we need?



$$\text{Empirical probability of crossing} = 0.318$$

$$\text{Empirical probability of crossing} = 0.318$$

$$\frac{1}{\text{Empirical probability of crossing}} = \frac{1}{0.318} = 3.14...$$

$$\text{Empirical probability of crossing} = 0.318$$

$$\frac{1}{\text{Empirical probability of crossing}} = \frac{1}{0.318} = 3.14\ldots$$

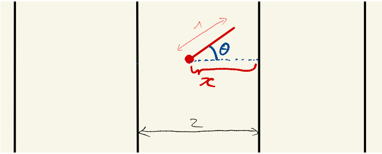
 ?

Let's compute it!

- $x =$ distance between the most left point of a the needle and the next vertical line,
- $\theta =$ angle between the needle and a horizontal line.

Two observations:

1. $x \in [0,2]$ and $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ are *uniformly* distributed
2. The needle crosses a line precisely when $x \le \cos\theta$.

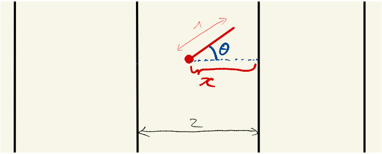


$$\text{Probability} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2} \mathbf{1}(x \le \cos\theta) \frac{\mathrm{d}x}{2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\pi}$$

- $x =$ distance between the most left point of a the needle and the next vertical line,
- $\theta =$ angle between the needle and a horizontal line.

Two observations:

1. $x \in [0,2]$ and $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ are *uniformly* distributed
2. The needle crosses a line precisely when $x \leq \cos\theta$.



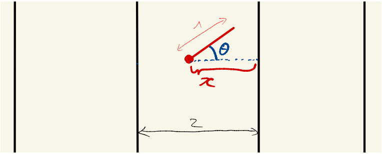
$$\text{Probability} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \mathbf{1}(x \leq \cos\theta) \frac{\mathrm{d}x}{2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

Let’s compute it!

- $x =$ distance between the most left point of a the needle and the next vertical line,
- $\theta =$ angle between the needle and a horizontal line.

Two observations:

1. $x \in [0, 2]$ and $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ are *uniformly* distributed
2. The needle crosses a line precisely when $x \le \cos\theta$.



$$\text{Probability} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \mathbf{1}(x \le \cos\theta) \frac{\mathrm{d}x}{2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}$$

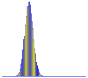
Two observations explained by two theorems

1. Loooooot of needles $\Rightarrow$ empirical probability $\simeq$ probability.

Two observations explained by two theorems

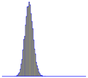
1. Loooooot of needles ⇒ empirical probability ≃ probability.

2. Many experiments ⇒ histogram has the shape of a bell .



Two observations explained by two theorems

1. Loooooot of needles $\Rightarrow$ empirical probability $\simeq$ probability.



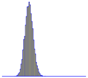
2. Many experiments $\Rightarrow$ histogram has the shape of a bell 🔔.
3. Computation $\Rightarrow$ integral.

Probability Theory:

1. The **law of large numbers**.
2. The **central limit theorem**.

Two observations explained by two theorems

1. Loooooot of needles $\Rightarrow$ empirical probability $\simeq$ probability.



2. Many experiments $\Rightarrow$ histogram has the shape of a bell 🔔.
3. Computation $\Rightarrow$ integral.

Probability Theory:

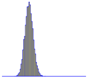
1. The **law of large numbers**.
2. The **central limit theorem**.

Random Geometry and Topology A:

1. Elaborate random geometric problems.
2. Tools to compute the corresponding integrals.

Two observations explained by two theorems

1. Loooooot of needles $\Rightarrow$ empirical probability $\simeq$ probability.



2. Many experiments $\Rightarrow$ histogram has the shape of a bell 🔔.
3. Computation $\Rightarrow$ integral.

Probability Theory:

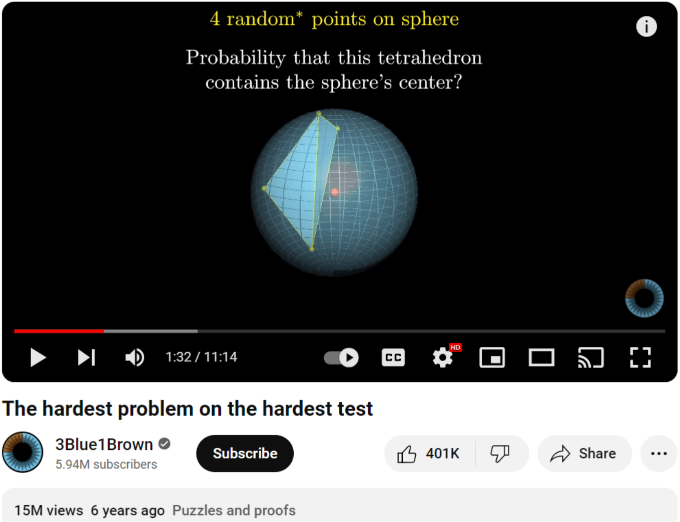
1. The **law of large numbers**.
2. The **central limit theorem**.

Random Geometry and Topology A:

1. Elaborate random geometric problems.
2. Tools to compute the corresponding integrals.

And also: Probability and Measure, Stochastic processes, Random Geometry and Topology B, Percolation Theory, ...

The space of spaces


4 random* points on sphere
Probability that this tetrahedron contains the sphere's center?
1:32 / 11:14
The hardest problem on the hardest test
3Blue1Brown
5.94M subscribers
Subscribe
401K
Share
15M views 6 years ago Puzzles and proofs

Finite dimensional real Banach spaces

Let $n \in \mathbb{N}$. A n-dimensional **Banach space** $(X, \|\cdot\|)$ is the vector space $X = \mathbb{R}^n$ equipped with a norm $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

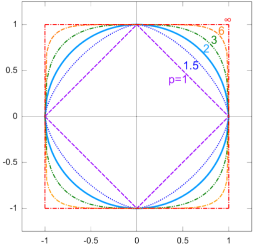
Finite dimensional real Banach spaces

Let $n \in \mathbb{N}$. A n-dimensional **Banach space** $(X, \|\cdot\|)$ is the vector space $X = \mathbb{R}^n$ equipped with a norm $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$.

$B_{\|\cdot\|} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ is called the **unit ball** of $(X, \|\cdot\|)$.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

1. $B_{\|\cdot\|}$ is convex
2. $B_{\|\cdot\|}$ is closed
3. $B_{\|\cdot\|}$ is bounded
4. $B_{\|\cdot\|}$ is symmetric
5. $B_{\|\cdot\|}$ contains 0 in its interior



L_p-balls

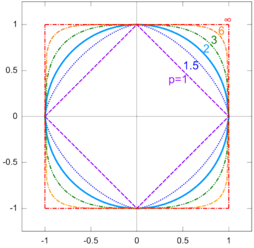
Finite dimensional real Banach spaces

Let $n \in \mathbb{N}$. A n-dimensional **Banach space** $(X, \|\cdot\|)$ is the vector space $X = \mathbb{R}^n$ equipped with a norm $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$.

$B_{\|\cdot\|} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ is called the **unit ball** of $(X, \|\cdot\|)$.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

1. $B_{\|\cdot\|}$ is convex
2. $B_{\|\cdot\|}$ is closed
3. $B_{\|\cdot\|}$ is bounded
4. $B_{\|\cdot\|}$ is symmetric
5. $B_{\|\cdot\|}$ contains 0 in its interior



L_p-balls

Banach spaces $\Leftrightarrow$ Unit balls

$=$ closed, convex, symmetric sets with non-empty interior.

Isometric spaces

Two Banach spaces X and Y are **isometric** if there exists a linear isometry $T : X \to Y$, i.e. a linear bijection such that $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ for all $x \in X$.

Isometric spaces

Two Banach spaces X and Y are **isometric** if there exists a linear isometry $T : X \to Y$, i.e. a linear bijection such that $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ for all $x \in X$.

Isometric classes

The **isometric class** of a Banach space X is the set of all Banach spaces isometric to X.

Isometric spaces

Two Banach spaces X and Y are **isometric** if there exists a linear isometry $T : X \to Y$, i.e. a linear bijection such that $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ for all $x \in X$.

Isometric classes

The **isometric class** of a Banach space X is the set of all Banach spaces isometric to X.

Isometry and unit balls

Two Banach spaces X and Y are isometric if and only if there exists a linear transformation $T \in GL_n$ such that $T(B_X) = B_Y$.

Banach-Mazur distance (unit balls)

Let K and L be unit balls of two n-dimensional Banach spaces.

The (multiplicative) **Banach-Mazur distance** between these sets is defined as

$$d(K, L) = \inf\{r \geq 1 : \exists T \in \mathrm{GL}_n, K \subset T\,L \subset rK\}.$$

Banach-Mazur distance (unit balls)

Let K and L be unit balls of two n-dimensional Banach spaces.

The (multiplicative) **Banach-Mazur distance** between these sets is defined as

$$d(K, L) = \inf\{r \geq 1 : \exists T \in \mathrm{GL}_n, K \subset T\,L \subset rK\}.$$

Banach-Mazur distance (Banach spaces)

Let $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ and $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_Y)$ be two n-dimensional Banach spaces.

The (multiplicative) **Banach-Mazur distance** between these spaces is defined as

$$d(X, Y) = d(B_X, B_Y).$$

Banach-Mazur distance (unit balls)

Let K and L be unit balls of two n-dimensional Banach spaces.

The (multiplicative) **Banach-Mazur distance** between these sets is defined as

$$d(K, L) = \inf\{r \geq 1 : \exists T \in \mathrm{GL}_n, K \subset T\,L \subset rK\}.$$

Banach-Mazur distance (Banach spaces)

Let $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ and $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_Y)$ be two n-dimensional Banach spaces.

The (multiplicative) **Banach-Mazur distance** between these spaces is defined as

$$d(X, Y) = d(B_X, B_Y).$$

Banach-Mazur compactum

The **Banach-Mazur compactum** $\mathcal{M}_n$ is the set of isometric classes of n-dimensional Banach spaces.

Question

$$\text{Diameter}(\mathcal{M}_n) := \max_{X,Y\in\mathcal{M}_n} d(X,Y) = ?$$

Question

$$\mathrm{Diameter}(\mathcal{M}_n) := \max_{X,Y \in \mathcal{M}_n} d(X,Y) = ?$$

John's ellipsoid

Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a unit ball. There exists a unique ellipsoid E of maximal volume contained in K. It is called the **John's ellipsoid** of K, and satisfies

$$E \subset K \subset \sqrt{n}E.$$

Question

$$\text{Diameter}(\mathcal{M}_n) := \max_{X,Y \in \mathcal{M}_n} d(X,Y) = ?$$

John's ellipsoid

Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a unit ball. There exists a unique ellipsoid E of maximal volume contained in K. It is called the **John's ellipsoid** of K, and satisfies

$$E \subset K \subset \sqrt{n}E.$$

Consequence: For any Banach spaces X and Y:

$$d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n} \text{ and } d(Y, \ell_2^n) \leq \sqrt{n} \;\Rightarrow\; d(X,Y) \leq d(X, \ell_2^n) \cdot d(\ell_2^n, Y) \leq n.$$

Thus $\text{Diameter}(\mathcal{M}_n) \leq n$.

We know that $\mathrm{Diameter}(\mathcal{M}_n) \leq n$.

Question

Can we find two Banach spaces X and Y such that $d(X,Y) = n$?

We know that $\mathrm{Diameter}(\mathcal{M}_n) \leq n$.

Question

Can we find two Banach spaces X and Y such that $d(X, Y) = n$?

Candidates: $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ where $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

We know that $\mathrm{Diameter}(\mathcal{M}_n) \leq n$.

Question

Can we find two Banach spaces X and Y such that $d(X, Y) = n$?

Candidates: $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ where $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Distance between ℓ_p spaces

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \sqrt{n}.$$

We know that $\mathrm{Diameter}(\mathcal{M}_n) \leq n$.

Question

Can we find two Banach spaces X and Y such that $d(X, Y) = n$?

Candidates: $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ where $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Distance between ℓ_p spaces

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \sqrt{n}.$$

Alternative candidate?

We know that $\mathrm{Diameter}(\mathcal{M}_n) \leq n$.

Question

Can we find two Banach spaces X and Y such that $d(X,Y) = n$?

Candidates: $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ where $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Distance between ℓ_p spaces

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \sqrt{n}.$$

Alternative candidate?

Random convex hulls!

Let $g_1, g_2, \ldots$ be independent standard Gaussian vectors in $\mathbb{R}^n$.

$$B_{n,m} := \text{convex-hull}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n, \pm g_1, \ldots, \pm g_m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Let $g_1, g_2, \ldots$ be independent standard Gaussian vectors in $\mathbb{R}^n$.

$$B_{n,m} := \text{convex-hull}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n, \pm g_1, \ldots, \pm g_m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

$$B'_{n,m} := \text{convex-hull}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n, \pm g_{m+1}, \ldots, \pm g_{2m}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Let $g_1, g_2, \dots$ be independent standard Gaussian vectors in $\mathbb{R}^n$.

$$B_{n,m} := \text{convex-hull}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n, \pm g_1, \dots, \pm g_m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

$$B'_{n,m} := \text{convex-hull}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n, \pm g_{m+1}, \dots, \pm g_{2m}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Theorem (Gluskin, 1981)

For every $\delta > 0$, there exists a constant $c > 0$ such that for all $n \in \mathbb{N}$, and for $m = \lfloor \delta n \rfloor$, one has

$$\mathbb{P}(d(B_{n,m}, B'_{n,m}) \geq c\, n) \geq 1 - \exp(-c\, n).$$

Let $g_1, g_2, \ldots$ be independent standard Gaussian vectors in $\mathbb{R}^n$.

$$B_{n,m} := \text{convex-hull}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n, \pm g_1, \ldots, \pm g_m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

$$B'_{n,m} := \text{convex-hull}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n, \pm g_{m+1}, \ldots, \pm g_{2m}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Theorem (Gluskin, 1981)

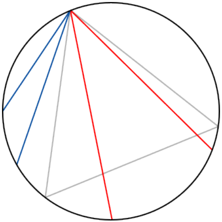
For every $\delta > 0$, there exists a constant $c > 0$ such that for all $n \in \mathbb{N}$, and for $m = \lfloor \delta n \rfloor$, one has

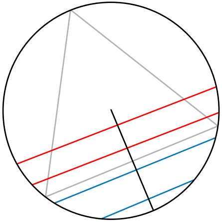
$$\mathbb{P}(d(B_{n,m}, B'_{n,m}) \geq c\, n) \geq 1 - \exp(-c\, n).$$

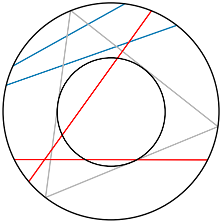
Answer

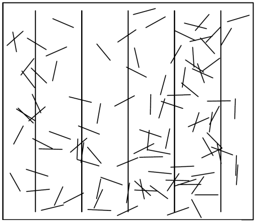
$$c\, n \leq \text{Diameter}(\mathcal{M}_n) = \max_{X,Y \in \mathcal{M}_n} d(X, Y) \leq n.$$

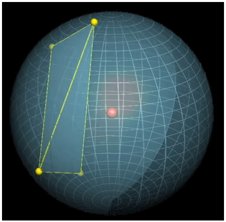
Final words

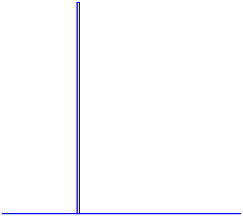


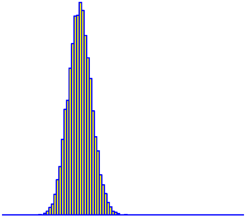


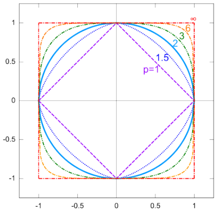


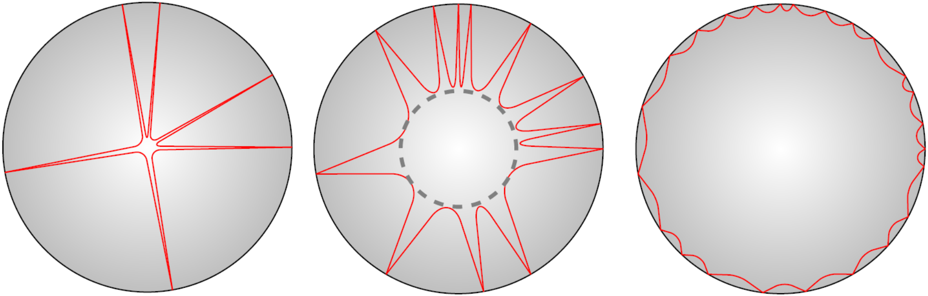








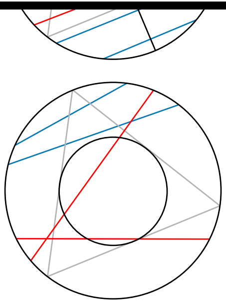

∞
6
3
2
1.5
p=1
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

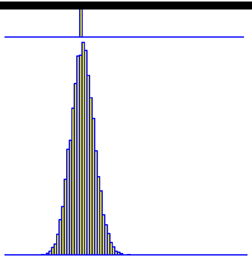


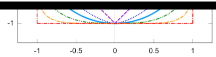
(a) **sub-exponential regime**
$(\ln n)/d \to 0$.
Facets' heights $\simeq O(1/\sqrt{d})$.

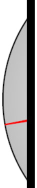
(b) **exponential regime**
$(\ln n)/d \to \alpha$.
Facets' heights $\simeq \sqrt{1-e^{-\alpha}}$.

(c) **super-exponential regime**
$(\ln n)/d \to \infty$.
Facets' heights $\simeq 1$.

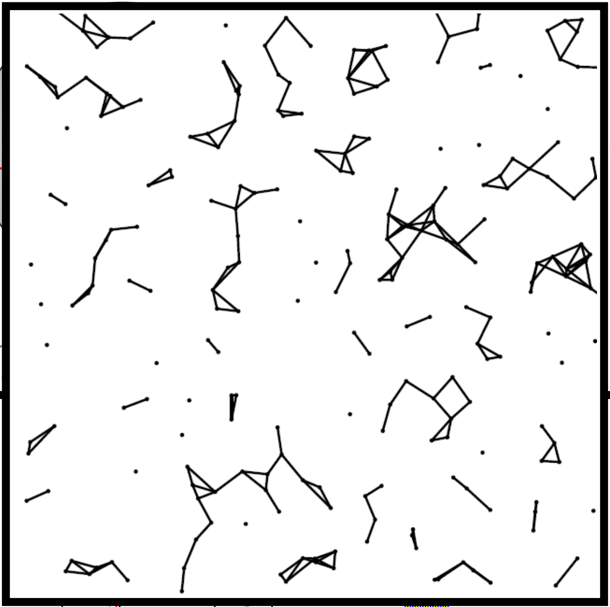


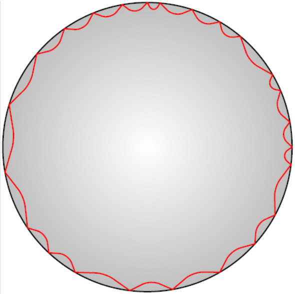




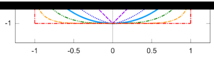


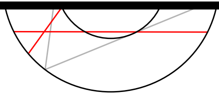
(a)
(ln n
Fac

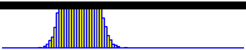


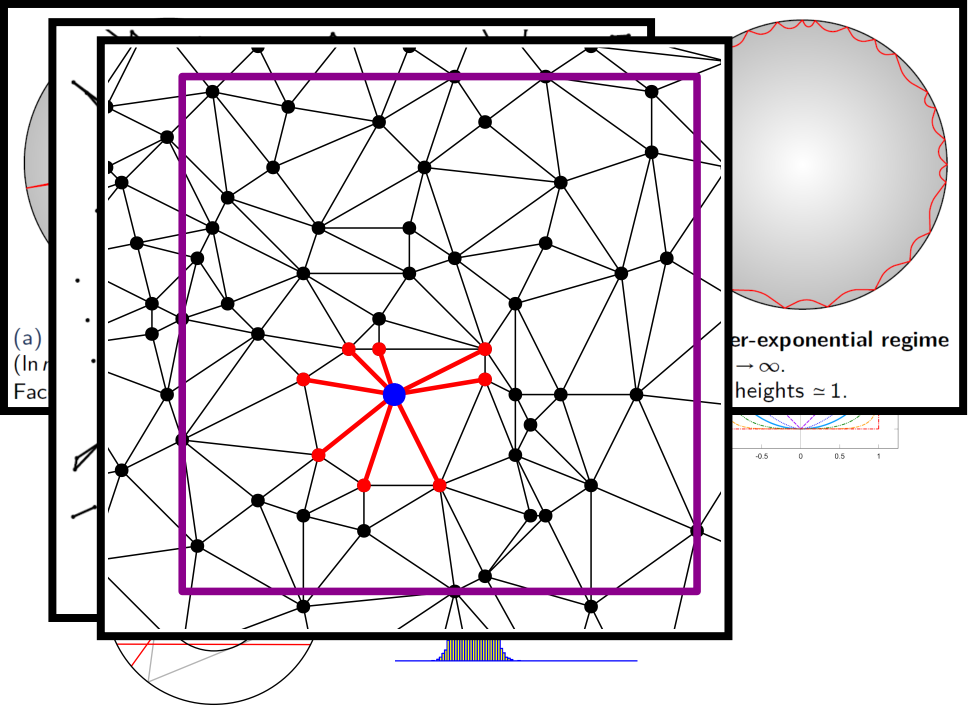


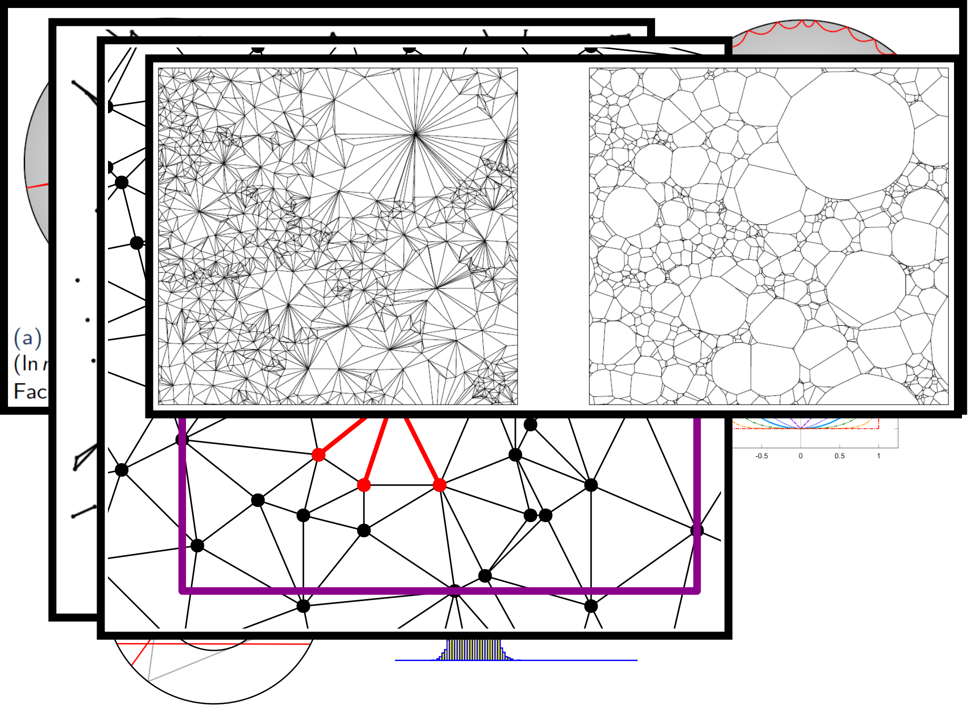
(c) **super-exponential regime**
$(\ln n)/d \to \infty$.
Facets' heights $\simeq 1$.

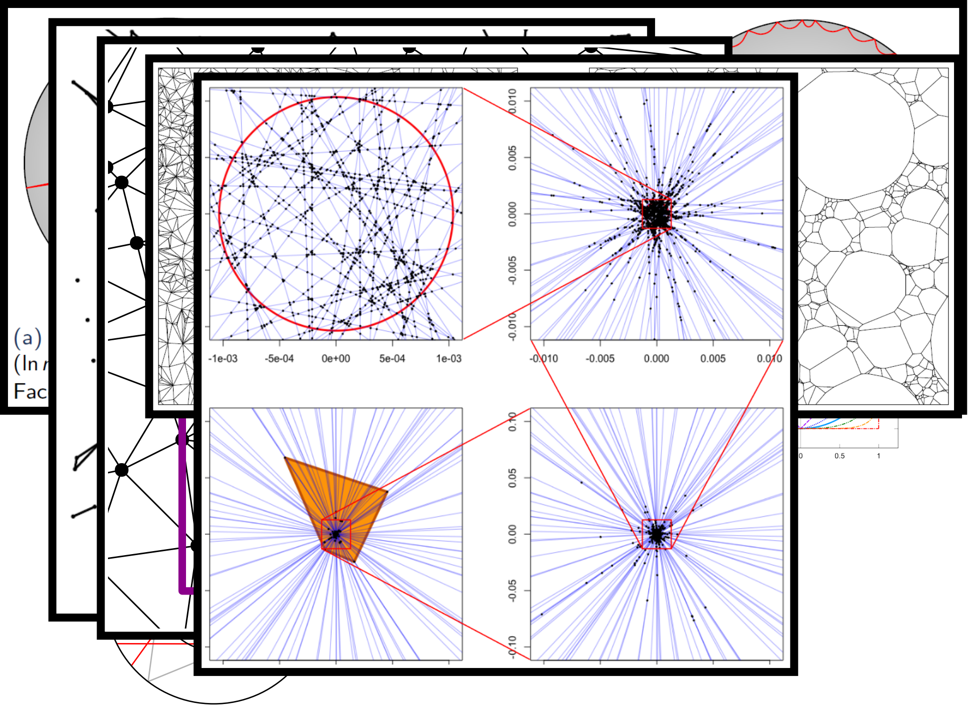


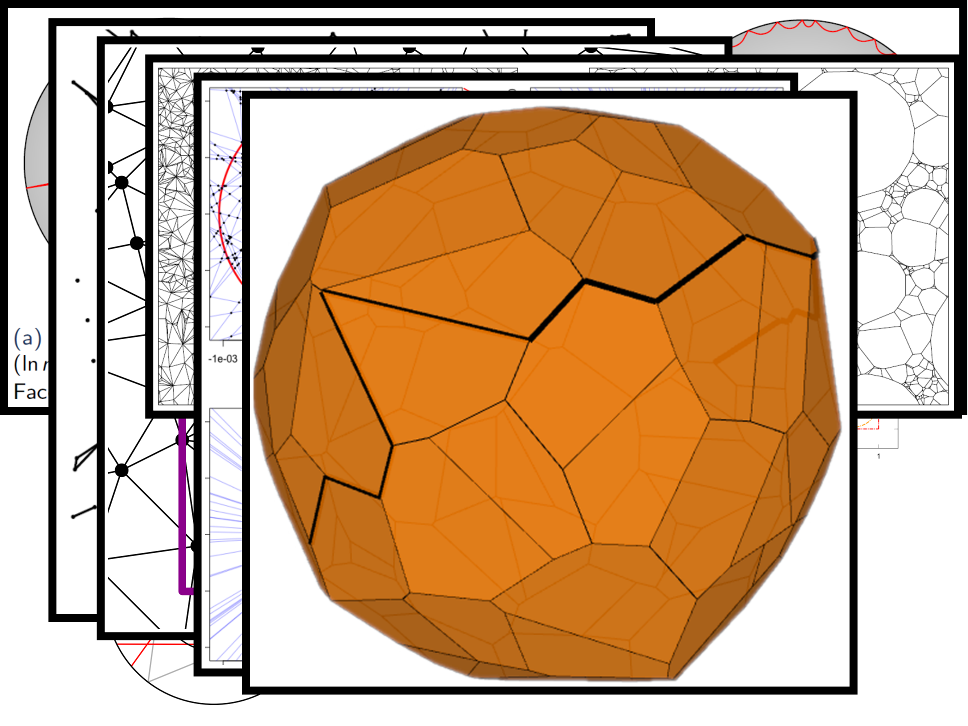





(a)
(ln
Fac
er-exponential regime
→ ∞.
heights ≃ 1.
-0.5
0
0.5
1


(a)
-0.5
0
0.5
1


(a)
(ln r
Fac
-1e-03
-5e-04
0e+00
5e-04
1e-03
0.010
0.005
0.000
-0.005
-0.010
-0.010
-0.005
0.000
0.005
0.010
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
0
0.5
1



(a)
-1e-03