kalenderrekenen

Jaap Top

JBI-RuG & DIAMANT
j.top@rug.nl

12-13 april 2011
(Collegecarrousel, Groningen)

Er zijn eigenlijk maar 14 verschillende kalenders:

- schrikkeljaar / geen schrikkeljaar;
- 1 januari is op zo / ma / di / wo / do / vr / za.

Totaal dus $2 \times 7 = 14$ mogelijkheden.

Voorbeeld: 2011 is geen schrikkeljaar, 1 januari 2011 viel op zaterdag.

Dezelfde kalender werkt voor 2022 en voor 2033.

Ook voor 2044??

Nog een voorbeeld: 2012 is een schrikkeljaar, en 1 januari gaat dan op zondag vallen.

Wanneer kunnen we de kalender van 2012 opnieuw gebruiken?

Pas 28 jaar later...

Wanneer hebben we een schrikkeljaar?

In 2000, 2004, 2008, 2012, ...

Maar: 2100 is geen schrikkeljaar, en 1900 was het ook niet.

Regel: jaar n is een schrikkeljaar, als n deelbaar is door 4; behalve als $n = 100 \cdot m$. Er geldt dat $100 \cdot m$ een schrikkeljaar is, als m deelbaar is door 4.

Dus: 1992, 2008, 2196 zijn schrikkeljaren,
en 1600, 2000 em 2400 ook;
maar 2011, 2013, 2200, 2500 zijn het niet.

Als jaar n schrikkeljaar is, dan jaar $n + 400$ ook.

Immers, n is deelbaar door 4 precies als $n + 400$ dat is, en $n = 100 \cdot m$ precies als $n + 400 = 100 \cdot (m + 4)$, en dan is m door 4 deelbaar precies als $m + 4$ dat is.

Conclusie: ‘schrikkeljaar zijn’ is periodiek, met periode 400.

In een ‘gewoon’ jaar vallen 365 dagen.

$$\begin{aligned}365 &= 350+14+1\\ &= 7\times 50+7\times 2+1\\ &= 7\times 52+1.\end{aligned}$$

Dus in een gewoon jaar vallen 52 weken plus nog 1 dag.

Na een gewoon jaar is de kalender 1 dag opgeschoven.
(zondag wordt maandag, maandag wordt dinsdag enz.)

Een schrikkeljaar heeft een dag meer, dus

$$366 = 52 \times 7 + 2$$

dagen.

Na een schrikkeljaar is de kalender 2 dagen opgeschoven.
(zondag wordt dinsdag, maandag wordt woensdag enz.)

Zo vinden we, beginnend bij 1 januari 2011 = zondag:

2011 is gewoon, dus 1 januari 2012 = maandag;

2012 is schrikkeljaar, dus 1 januari 2013 is woensdag;

2013 is gewoon, dus 1 januari 2014 is donderdag.

zo	2012	2017	2023	2034	2040
ma	2018	2024	2029	2035	
di	2013	2019	2030	2036	
wo	2014	2020	2025	2031	
do	2015	2026	2032	2037	
vr	2016	2021	2027	2038	
za	2011	2022	2028	2033	2039

Hoeveel weken vallen er in zo'n periode van 400 jaar?

In 400 jaar = 400 opeenvolgende getallen:

- Precies 100 ervan deelbaar door 4;
- Van die 100 zijn er precies 4 deelbaar door 100;
- Van die 4 is er eentje die toch schrikkeljaar is.

Dus in een periode van 400 jaar:

$100 - 3 = 97$ schrikkeljaren, en

$400 - 97 = 303$ gewone jaren.

In totaal dus $303 \times (52 \times 7 + 1) + 97 \times (52 \times 7 + 2)$ dagen,

dat is $7 \times (400 \times 52) + 303 + 194$

is $7 \times 20800 + 497$

is $7 \times 20800 + 7 \times 71 = 7 \times 20871$.

Dus: een periode van 400 jaar is precies een geheel aantal weken!

Na 400 jaar kan je dus altijd dezelfde kalender weer gebruiken.

Voorbeeld: 13 april 2011 valt op woensdag, zo ook 13 april 2411 en 13 april 2811 en 13 april 3211.

. . . en, omdat 13 april 2011 op woensdag is, valt dus 13 april 2012 (en 2412 en 2812 en 3212 en. . .) op donderdag,

en 13 april 2013 en 13 april 2413 en. . . op zaterdag

en 13 april 2014 en 13 april 2414 en 2814 en. . . op zondag.

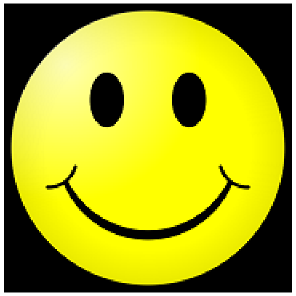
Hoe zit dat dan met vrijdag de dertiende?!

in 2011: alleen 13 mei is op vrijdag

2010: alleen 13 augustus

2008: alleen 13 juni

Komt er wel elk jaar een vrijdag de dertiende voor?
(12$\times$ een 13de van de maand, 12 maanden...)



Feit: elk jaar valt de dertiende minstens één keer op vrijdag.

Dit gaan we bewijzen, uitgaande van 1 januari. Als die op een bepaalde dag valt, op welke dagen vallen dan de 12 dertienden van de maanden?

Voorbeeld: een gewoon jaar, met 1 januari op zaterdag (bijv. 2011):

13 januari valt 12 dagen = 1 week + 5 dagen later.
zaterdag + 5 = donderdag.

13 maart valt $30 + 28 + 13 = **$ weken $+ 2 + 6 =$
$= ***$ weken + 1 dag na 1 januari.
zaterdag + 1 = zondag.

13 oktober:
$30 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 13$
levert $*$ weken $+ 4 \times 2 + 4 \times 3 + 6$ dagen
levert $****$ weken + 5 dagen.
zaterdag + 5 = donderdag.

Zo doorgaand, bij een gewoon jaar:

januari: dag+5 (idem oktober)
februari: dag+1 (idem maart, november)
april: dag+4 (idem juli)
mei: dag+6
juni: dag+2
augustus: dag+0
september: dag+3 (idem december).

In een gewoon jaar komen dus alle mogelijkheden voor.
Eentje zelfs drie keer.

Hetzelfde voor een schrikkeljaar:

januari: dag+5 (idem april, juli)
februari: dag+1 (idem augustus)
maart: dag+2 (idem november)
mei: dag+0
juni: dag+3
september: dag+4 (idem december)
oktober: dag+6.

Ook hier komen alle mogelijkheden voor (eentje drie keer)

Conclusie: in elk jaar komt vrijdag de dertiende voor.

(In sommige van de 14 mogelijke kalenders wel drie keer; bijvoorbeeld in 2012 en in 2009.)

(In sommige jaren hebben we twee keer vrijdag de dertiende; bijvoorbeeld in 2013.)

Op welke dag valt de dertiende van de maand? In 2011:

$$\begin{array}{r|l} \text{zo:} & 3\times \\ \text{ma:} & 1\times \\ \text{di:} & 2\times \\ \text{wo:} & 2\times \\ \text{do:} & 2\times \\ \text{vr:} & 1\times \\ \text{za:} & 1\times. \end{array}$$

Feit: in elke periode van precies 400 jaar komt vrijdag de dertiende 688 keer voor.

Dit is met een vrij lange, maar niet moeilijke berekening na te gaan.

De dertiende in een periode van 400 jaar:

zo:	$687\times$
ma:	$685\times$
di:	$685\times$
wo:	$687\times$
do:	$684\times$
vr:	$688\times$
za:	$684\times$.

Conclusie: de dertiende van de maand valt het vaakst op vrijdag, en het minst vaak op donderdag en zaterdag.

(De eerste van de maand blijkt het vaakst op zondag te vallen.)

(De 31ste van de maand valt het vaakst op donderdag.)

Een wiskundige die aan de kalender heeft gewerkt, is de Engelsman John Conway (geb. 1937).

Nog een ideetje van Conway, voor het snel vinden van de dag waarop een zekere datum valt:

Feit: in elk jaar vallen de laatste dag van februari en 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 en 12/12 op dezelfde dag van de week.

In 2011 viel 28 februari op maandag, dus (bijvoorbeeld) eerste kerstdag (= 25/12):
12/12 is maandag, dus twee weken later, 26/12, ook, dus eerste kerstdag is dit jaar op zondag.

In 2012 valt 29 februari op woensdag (waarom?), dus mijn verjaardag op vrijdag...