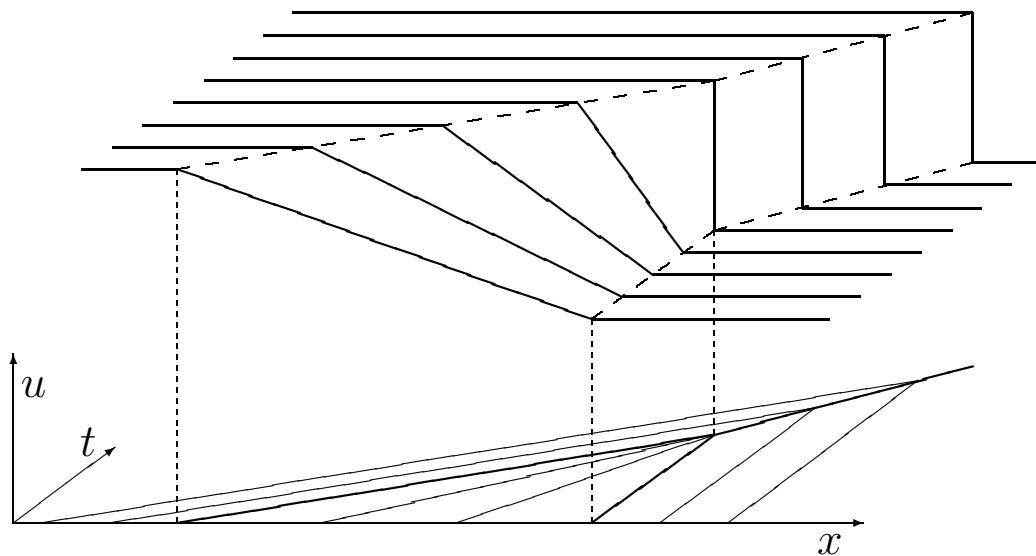




PARTIELE DIFFERENTIAAL- VERGELIJKINGEN

A.E.P. Veldman



Instituut voor Wiskunde
en Informatica

RuG



Collegedictaat

PARTIELE DIFFERENTIAAL- VERGELIJKINGEN

A.E.P. Veldman

Rijksuniversiteit Groningen
Instituut voor Wiskunde en Informatica
Postbus 800
9700 AV Groningen

September 1996

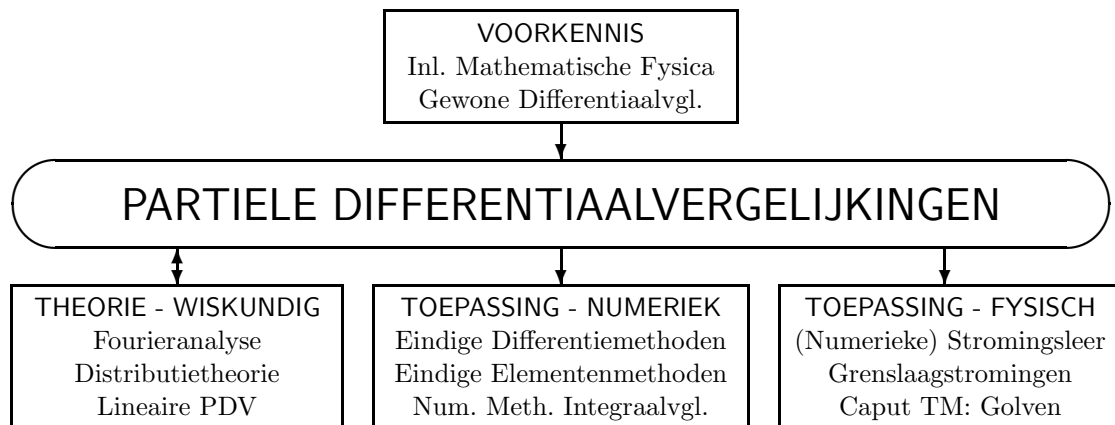
VOORWOORD

Veel fysische verschijnselen kunnen worden beschreven met behulp van partiële differentiaalvergelijkingen (PDV's). Om deze verschijnselen theoretisch te bestuderen moeten deze vergelijkingen opgelost worden. In eenvoudige gevallen kan dit met analytische methoden (reeksontwikkelingen, separatie van variabelen, e.d.), maar vaak zal dit numeriek gebeuren. Het ontwerpen van analytische en numerieke oplosmethoden vereist inzicht in het karakter van de PDV.

In dit college gaan we daarom in op de theoretische achtergronden van de PDV's uit de praktijk. De nadruk ligt op die eigenschappen die van belang zijn bij het ontwerpen van oplosmethoden. Speciaal komen aan de orde:

- (a) de informatie voortplanting in tijd en ruimte behorende bij de PDV;
- (b) de combinaties PDV en begin/randvoorwaarden die een goed gesteld probleem opleveren.

De analyse technieken en argumenten die we hierbij zullen toepassen zijn ook bruikbaar voor het analyseren van stelsels discrete vergelijkingen, ontstaan na discretisatie van PDV's. Hierdoor ontstaat een nauwe relatie met colleges op het gebied van numerieke methoden. Daarnaast bestaan er raakvlakken met fysische colleges en met meer theoretisch georiënteerde colleges.



De volgende literatuur bevat achtergrond informatie:

- R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*, Wiley (1962)
- G.B. Whitham, *Linear and Non-linear Waves*, Wiley (1974)
- E. Zauderer, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, Wiley (1983)
- H.-O. Kreiss & J. Lorenz, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*, Academic Press (1989)

Groningen,
September 1996

Inhoudsopgave

1	INLEIDING	5
1.1	Wat is een PDV?	5
1.2	Voorbeelden	6
1.3	Stelsels en hogere orde vergelijkingen	8
1.4	Convectie, diffusie, dispersie	8
2	KARAKTERISTIEKEN	11
2.1	Cauchy probleem	11
2.2	Voorbeelden	14
2.3	Informatie voortplanting	15
2.4	Discontinuïteiten bij lineaire vergelijkingen	17
2.5	File vorming bij verkeerslichten	17
3	KLASSIFICATIE VAN PDV's	21
3.1	Eerste orde stelsels in twee onafhankelijke variabelen	21
3.2	Karakteristieken en invarianten	22
3.3	Tweede orde vergelijkingen met één afhankelijke variabele	25
3.4	Voorbeelden uit de stromingsleer	27
4	HYPERBOLISCHE BEGIN- EN RANDWAARDE PROBLEMEN	31
4.1	Riemann invarianten	31
4.2	In- en uitgaande karakteristieken	32
4.3	Zwakke oplossingen	35
4.4	De vergelijking van Burgers	37
4.5	Stationaire isentropie Euler vergelijkingen (2-D)	40
4.6	File vorming bij verkeerslichten - vervolg	44
5	GOED-GESTELDE BEGIN- EN RANDWAARDE PROBLEMEN	47
5.1	De stelling van Cauchy-Kowalewsky	48
5.2	Het Fourier symbool	49
5.3	Goed-gesteldheid	50
5.4	Inhomogene lineaire vergelijkingen.	53
5.5	Niet-lineaire vergelijkingen	55
5.6	Goed-gestelde randwaarde problemen	56
5.7	Analyse van begin/randwaarde problemen in meer dimensies: een voorbeeld	58

6	PARABOLISCHE BEGIN- EN RANDWAARDE PROBLEMEN	63
6.1	De warmtegeleidingsvergelijking	63
6.2	Algemene begin/randwaarde problemen	66
7	ELLIPTISCHE RANDWAARDE PROBLEMEN	69
7.1	Potentiaalvergelijking	69
7.2	Elliptische operatoren	72
7.3	De Ritz formulering	73
7.4	Zwakke oplossingen en Galerkin	74
8	POTENTIALTHEORIE	77
8.1	De functie van Green	77
8.2	Voorbeelden van Greense functies	79
8.3	Singulariteitenbeleggingen	81
8.4	Stroming rond een vleugelprofiel	84
A	GEREEDSCHAP UIT ANALYSE EN LINEAIRE ALGEBRA	87
A.1	Eigenwaarden en eigenvectoren	87
A.2	Gewone differentiaalvergelijkingen	88
A.3	Functieruimten en ongelijkheden	90
B	VRAAGSTUKKEN	93
B.1	Opgaven	93
B.2	Antwoorden	100

Hoofdstuk 1

INLEIDING

1.1 Wat is een PDV?

Grootheden waarmee fysische processen beschreven kunnen worden (toestandsvariabelen) zijn wiskundig te karakteriseren als functies, welke afhangen van een aantal ruimte variabelen en/of een tijd variabele. Het fysisch proces kan worden benaderd met een wiskundig model. Zo'n model geeft een relatie tussen de bovengenoemde functies, hun partiële afgeleiden naar ruimte en tijd en/of integraal uitdrukkingen. Wanneer in zo'n relatie uitsluitend de functies en hun partiële afgeleiden voorkomen spreken we van een *Partiële Differentiaalvergelijking* (PDV).

De fysische grootheden die we willen bepalen zijn vaak n -dimensionale vectorfuncties met complexe functiewaarden: $u(x, t) = (u_1, \dots, u_n)(x, t) \in \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$). De ruimte variabelen worden aangeduid met de vector $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$ ($s = 1, 2$ of 3) en t is de tijd. Partiële afgeleiden kunnen verkort genoteerd worden als

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}; \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \text{etc.}$$

Een PDV is nu te schrijven als een relatie van de vorm

$$F(x_1, \dots, x_s, t; u; u_{x_1}, \dots, u_{x_s}, u_t; u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots; \dots) = 0,$$

welke geldt in een gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^s$. In abstracter notatie ziet een PDV er uit als

$$F\left(x, t; u; \frac{\partial^{|\nu|} u}{(\partial x_1)^{\nu_1} \dots (\partial x_s)^{\nu_s} (\partial t)^{\nu_t}}\right) = 0,$$

met $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_s + \nu_t$ en $|\nu| = 1, 2, \dots, N$. F is ook een vectorfunctie met evenveel componenten als er onbekenden u_i zijn, dus n . De orde van de hoogste partiële afgeleide bepaalt de orde van de PDV; hier is de PDV dus van de N^e orde.

Terminologie

Een PDV heet *lineair* als F lineair is in u en al zijn afgeleiden, bijvoorbeeld

$$u_{xx} + x^2 u_{xy} + yu = 0.$$

Een PDV heet *quasi-lineair* als F lineair is in de hoogste-orde afgeleiden, bijvoorbeeld

$$u_x^2 u_{xx} + u u_y u_{xy} + y^2 u_{yy} + \sqrt{u} = 0.$$

Een functie u heet een *klassieke oplossing* van de PDV als geldt:

- i) u is N maal differentieerbaar;
- ii) u voldoet aan $F = 0$.

Het adjectief ‘klassiek’ wordt vaak weggelaten. Later zullen we het begrip ‘oplossing’ gaan verruimen, waarbij niet aan i) voldaan hoeft te zijn.

De oplossing van een PDV is in het algemeen niet eenduidig. Door middel van *beginvoorwaarden* (op $t = 0$) en/of *randvoorwaarden* op de rand van Ω , die we aangeven met $\partial\Omega$, hoopt men te komen tot een eenduidige oplossing.

Wanneer de begin/randvoorwaarden licht worden gewijzigd en/of de coëfficiënten van de PDV licht worden gewijzigd mag een oplossing worden verwacht die in de buurt ligt van de oorspronkelijke oplossing. Zo niet, dan is de fysische betekenis van de oplossing onduidelijk. Een PDV die zich in dit opzicht netjes gedraagt heet *goed gesteld* (Engels: well posed) in tegenstelling tot *slecht gesteld* (Engels: ill posed). Hadamard hanteert de volgende criteria voor een goed gesteld probleem:

- i) de oplossing moet bestaan en eenduidig zijn;
- ii) de oplossing moet continu afhangen van de begin- en randvoorwaarden.

Op een nauwkeuriger invulling van dit begrip komen we later terug.

1.2 Voorbeelden

In het 2^e-jaars college Inleiding Mathematische Fysica zijn al enkele voorbeelden van PDV's behandeld, o.a.:

- de *potentiaalvergelijking* (vergelijking van Laplace)

$$\Delta\Phi = 0 \quad \left(\Delta = \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)$$

- de *golfvergelijking*

$$\Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0$$

- de *continuïteitsvergelijking* voor compressibele stroming (algemeen: transportvergelijking)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

(ρ is dichtheid; u is snelheidsvector)

- de *warmtegeleidingsvergelijking*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T$$

(T : temperatuur, $k > 0$: geleidingscoëfficiënt)

De convectie-diffusie vergelijking

De twee laatste voorbeelden zijn te combineren tot de zogenaamde convectie-diffusie vergelijking. We gaan deze vergelijking hier afleiden omdat de afleiding, als behoudswet, op zichzelf ook al leerzaam is.

Beschouw het transport van een stof, met concentratie $\phi(x, t)$, in een stromend medium met snelheid $u(x, t)$. Twee transportmechanismen worden onderscheiden:

$$\begin{aligned} \text{convectie} &= \text{transport ten gevolge van stroming van het medium} \\ \text{diffusie} &= \text{transport ten gevolge van concentratieverschillen} \end{aligned}$$

De vergelijking die de concentratie als functie van plaats en tijd beschrijft kan afgeleid worden door middel van een massa-behoudswet. Beschouw hiertoe een willekeurig volume element V met rand S . De naar buiten wijzende normaal is n . De afname per tijdseenheid van de hoeveelheid stof binnen V wordt veroorzaakt door het transport van deze stof door de rand S naar buiten. Het convectieve transport per tijdseenheid wordt gegeven door

$$\int_S \phi u \cdot n \, dS;$$

het diffusieve transport is gelijk aan

$$\int_S -k \operatorname{grad} \phi \cdot n \, dS,$$

waarbij de diffusie evenredig is gekozen met de concentratiegradiënt (diffusiecoëfficiënt $k \geq 0$).

Massa behoud in V levert

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV = - \int_S (\phi u - k \operatorname{grad} \phi) \cdot n \, dS, \quad (1.1)$$

geldig voor elk willekeurig volume element V .

De relatie (1.1) drukt het behoud van de beschouwde stof uit; dit is de eigenlijke *behoudswet*. Wanneer de voorkomende grootheden voldoende differentieerbaar zijn kan de stelling van Gauss toegepast worden, zodat

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV = - \int_V \operatorname{div} (\phi u - k \operatorname{grad} \phi) \, dV.$$

Omdat dit voor elke V moet gelden, resulteert de differentiaalvorm van de behoudswet

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} (\phi u - k \operatorname{grad} \phi) = 0. \quad (1.2)$$

De vorm waarin deze PDV staat, d.w.z

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} F(\phi) = 0, \quad (1.3)$$

heet *behoudsvorm* of *divergentie vorm*. De grootheid $F(\phi)$ heet de *flux functie* (deze naam zal duidelijk zijn uit de bovenstaande afleiding). De hierbij behorende behoudswet luidt

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV = - \int_S F \cdot n \, dS. \quad (1.4)$$

Belangrijk is dat in (1.3) $F(\phi)$ differentieerbaar moet zijn, terwijl dat in (1.4) niet hoeft.

1.3 Stelsels en hogere orde vergelijkingen

Veel PDV's passen in de algemene tweede orde gedaante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^s b_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + c\phi = 0. \quad (1.5)$$

Hierin is $(a_{ij})_{i,j=1}^s$ een $s \times s$ matrix welke symmetrisch kan worden gekozen; $(b_i)_{i=1}^s$ is een s -vector.

Wanneer we in (1.5) van ϕ een n -vector maken, dan worden alle elementen a_{ij} , b_i en c $n \times n$ matrices; a_{ij} , b_i , $c \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dit geval wordt met $s > 1$ en $n > 1$ onoverzichtelijk. Daarom zullen we ons voor n willekeurig meestal beperken tot het geval $s = 1$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial \phi}{\partial x} + C\phi = 0, \quad (1.6)$$

waarin $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en $\phi \in \mathbb{C}^n$.

1.4 Convectie, diffusie, dispersie

We behandelen nu enkele elementaire fysische begrippen en hun relatie tot de evolutie van de oplossing van de PDV.

Zoals behandeld in het college Inleiding Mathematische Fysica, is onder zekere voorwaarden een functie te ontbinden in Fouriercomponenten. We gaan een 1-D situatie bekijken met Fouriercomponenten $e^{i\omega x}$.

Voor enkele voorbeeldvergelijkingen gaan we kijken hoe zo'n Fouriercomponent evolueert. We substitueren daartoe $u(x, t) = a(\omega, t)e^{i\omega x}$, waarin a de amplitude van de Fouriercomponent met frequentie ω is.

Voorbeeld 1 *Eenvoudige golfvergelijking*

$$u_t + cu_x = 0 \quad (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow a_t + i\omega ca = 0 \Rightarrow a = a(\omega, 0)e^{-i\omega ct}$$

dus de oplossing luidt $u = e^{i\omega(x-ct)}$

We zien dat een golf zich verplaatst langs de lijn $x - ct = \text{constant}$. Dit geschiedt met voortplantingssnelheid c ongeacht de frequentie, dus de vorm wijzigt niet. We praten nu over zuivere *convectie*.

Voorbeeld 2 *Warmtegeleiding*

$$u_t - cu_{xx} = 0 \quad (\alpha > 0) \Rightarrow a_t + c\omega^2 a = 0 \Rightarrow a = a(\omega, 0)e^{-\omega^2 t}$$

De oplossing is $u = e^{i\omega x - \alpha\omega^2 t}$

De exponent heeft nu een negatief reëel deel. De amplitude van een Fouriercomponent neemt dus af, en wel des te sneller naarmate de frequentie ω hoger is. Dit verschijnsel is typisch voor *diffusie*.

Voorbeeld 3 *Klein-Gordon vergelijking* (bijvoorbeeld elastisch ingebedde snaar)

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} + \mu^2 u = 0 &\Rightarrow a_{tt} + (c^2 \omega^2 + \mu^2) a = 0 \\ &\Rightarrow a = a(\omega, 0) e^{i\lambda t} \text{ met } \lambda^2 = c^2 \omega^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

De oplossing luidt $u = e^{i(\omega x - \lambda t)}$.

Een Fouriercomponent verplaatst zich, met ongewijzigde amplitude, langs lijnen met helling $dx/dt = \lambda/\omega$ (voortplantingssnelheid). Voor verschillende Fouriercomponenten is de voortplantingssnelheid verschillend (zodra $\mu \neq 0$). Een golf opgebouwd uit een aantal Fouriercomponenten zal daardoor van vorm veranderen. Dit heet *dispersie*.

Omvormen naar eerste orde stelsels

Een PDV van hogere orde ($N > 1$) kan worden omgezet in een stelsel PDV's van de eerste orde. Dit kan door voor alle afgeleiden tot en met de $(N-1)^e$ orde nieuwe variabelen te introduceren.

Neem bijvoorbeeld een algemene tweede orde vergelijking in twee dimensies

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Voer in $p = u_x$ en $q = u_y$, dan wordt $u_{xx} = p_x$, $u_{xy} = p_y (= q_x)$, $u_{yy} = q_y$. Na substitutie ontstaat het eerste orde stelsel

$$\begin{cases} F(x, y, u, p, q, p_x, p_y, q_y) = 0 \\ u_x - p = 0 \\ u_y - q = 0 \end{cases}$$

We hebben nu dus drie onbekenden

$$(u, p, q)^t \in \mathbb{C}^3$$

Voorbeelden

- *Potentiaal vergelijking in 2-D*: $\Delta \Phi = 0$

Stel $\Phi_x = u$, $\Phi_y = v$, dan

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ \Phi_x - u = 0 \\ \Phi_y - v = 0 \end{cases}$$

Omdat

$$\Phi$$

niet in de bovenste vergelijking voorkomt is deze te elimineren uit het stelsel via

$$u_y = (\Phi_x)_y = (\Phi_y)_x = v_x.$$

Het stelsel wordt dan

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ v_x - u_y = 0; \end{cases}$$

in matrix notatie

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = 0.$$

Dit zijn de Cauchy-Riemann vergelijkingen. De coëfficiëntenmatrix van dit stelsel is anti-symmetrisch.

- *Golfvergelijking in 2-D*: $\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0$

Analoog aan hierboven ontstaat

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ v_x - u_y = 0 \end{cases}$$

of

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = 0.$$

Nu is de coëfficiëntenmatrix symmetrisch.

Of de coëfficiëntenmatrix A in $u_x + Au_y = 0$ symmetrisch dan wel anti-symmetrisch is speelt een zeer belangrijke rol in het gedrag van de PDV, waarop we verderop uitgebreid zullen terugkomen.

Hoofdstuk 2

KARAKTERISTIEKEN

Beschouw een eerste orde PDV in twee onafhankelijke variabelen (x, y) en één afhankelijke variabele (u) . De meest algemene vorm hiervan is

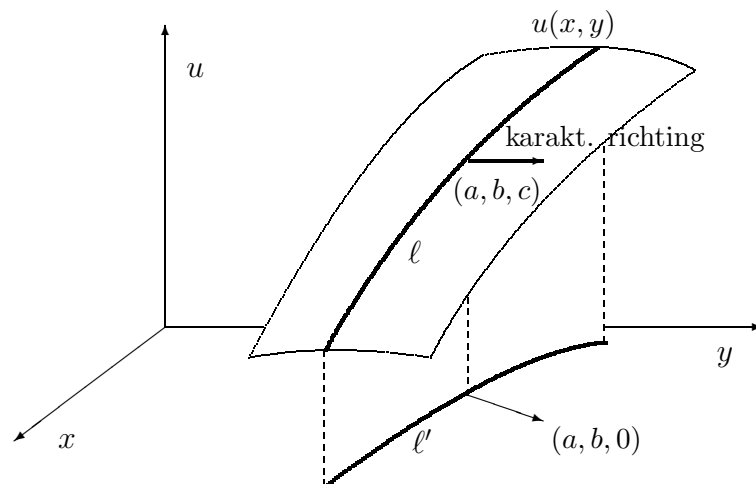
$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Wij beperken ons tot quasi-lineaire vergelijkingen, d.w.z. de PDV is lineair in u_x en u_y . De PDV heeft dan de algemene gedaante

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u). \quad (2.1)$$

2.1 Cauchy probleem

Een PDV heeft een veelheid aan oplossingen. Bij het Cauchy probleem is het de bedoeling om door middel van het voorschrijven van de oplossing langs een kromme, de oplossing eenduidig te maken.



Beschouw een kromme ℓ' in het (x, y) -vlak. Schrijf langs deze kromme de oplossing u voor. Er ontstaat dan in de (x, y, u) -ruimte een kromme ℓ . De bedoeling is om die oplossing te vinden die 'door ℓ gaat'.

Wanneer we een oppervlak $u = u(x, y)$ gegeven hebben, wordt de normaal op dit oppervlak gegeven door $n = (u_x, u_y, -1)$.

Bekijk nu in ieder punt van het oppervlak de vector (a, b, c) . Volgens de PDV staat deze vector loodrecht op de normaal, immers de PDV is niets anders dan het inproduct tussen deze beide vectoren. De richting van de vector noemen we een *karakteristieke richting*.

We kunnen nu in het oppervlak krommen gaan beschouwen die in elk punt raken aan de karakteristieke richting. In parametervoorstelling $x = x(s)$, $y = y(s)$ en $u = u(s)$ voldoen deze aan

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c. \quad (2.2)$$

Deze krommen heten *karakteristieken*. Hun projecties op het (x, y) -vlak heten *basiskarakteristieken*, maar vaak wordt het voorvoegsel ‘basis’ weggelaten. Als de vergelijking lineair is hangen a en b niet van u af. De basiskarakteristieken zijn daarmee ook onafhankelijk van u .

Het idee is nu om de oplossing van de PDV op te bouwen door een familie van karakteristieken.

Stelling 2.1 (a) Iedere (eenmaal continu differentieerbare) één-parameter familie van karakteristieken levert een oplossing van de PDV;

(b) Omgekeerd is iedere oplossing te beschouwen als zo’n één-parameter familie van karakteristieken.

Bewijs

(a) Laat de één-parameter familie van karakteristieken gegeven zijn door

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t)$$

(t heeft hier niet de betekenis van tijd!), die daarmee voldoet aan (2.2). Wanneer de Jacobiaan $\Delta \equiv \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix} \neq 0$, zijn t en s in x en y uit te drukken. Dit kunnen we dan invullen in u , waarmee u een functie van x en y geworden is en daarmee een oppervlak in de (x, y, u) -ruimte voorstelt. De normaal $(u_x, u_y, -1)$ op dit oppervlak staat loodrecht op elke kromme in het oppervlak, dus ook op de karakteristieke richting (a, b, c) . M.a.w.

$$(a, b, c)(u_x, u_y, -1)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad au_x + bu_y - c = 0,$$

waarmee blijkt dat $u(x, y)$ aan de PDV (2.1) voldoet.

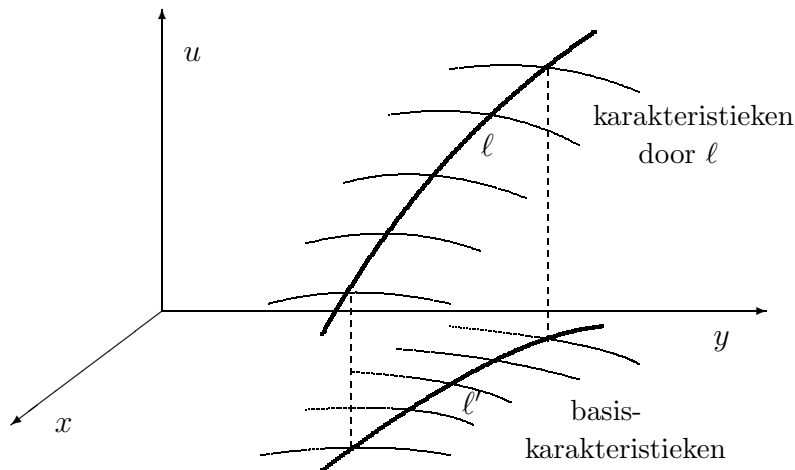
(b) Gegeven een oplossing $u = u(x, y)$ die aan (2.1) voldoet. We moeten nu laten zien dat de karakteristieken gedefinieerd door (2.2) op dit oppervlak liggen. Kies nu eerst in het (x, y) -vlak een kromme $\ell' : x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$. Construeer vervolgens, nog steeds in het (x, y) -vlak, een één-parameter familie van basiskarakteristieken hier doorheen die voldoen aan

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b,$$

met beginwaarden $x(0) = x_0(t)$, $y(0) = y_0(t)$. ‘Projecteer’ deze krommen op het gegeven oppervlak $u = u(x, y)$. Dit levert een één-parameter familie van krommen op het oppervlak op. Volgens de kettingregel, en omdat u aan (2.1) voldoet, geldt langs zo’n kromme

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = au_x + bu_y = c,$$

zodat zo’n kromme dus een karakteristiek blijkt te zijn. □



Bovenstaande stelling vormt de rechtvaardiging van de volgende constructie van de oplossing van het Cauchy probleem.

Laat de kromme ℓ geparametriseerd zijn met t volgens $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $u = u_0(t)$; noem zijn projectie op het (x, y) -vlak ℓ' . Construeer dan voor elke t de oplossing van de DV

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c,$$

welke voor $s = 0$ op de kromme ℓ begint. Dit resulteert dus in een één-parameter familie van karakteristieken $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $u = u(s, t)$. Om de oplossing $u(s, t)$ als functie van x en y te kunnen uitdrukken moeten s en t uitgedrukt kunnen worden in x en y . Zoals we boven al hebben opgemerkt moet de Jacobiaan

$$\Delta \equiv x_s y_t - x_t y_s \neq 0. \quad (2.3)$$

We kunnen dit ook schrijven als $x_s/y_s \neq x_t/y_t$. Deze eis betekent dus o.a. dat de beginkromme ℓ' nergens mag raken aan een basiskarakteristiek. Wanneer aan de eis (2.3) voldaan is mag op ℓ' de functie u willekeurig worden voorgeschreven. De oplossing bestaat dan in de buurt van ℓ' (zolang $\Delta \neq 0$ blijft).

Wanneer de beginkromme *wel* een karakteristiek is, dan ontstaat de volgende situatie:

- (i) u mag niet willekeurig worden voorgeschreven, omdat

$$\frac{du}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = a u_x + b u_y = c \quad (2.4)$$

moet gelden (op ℓ' geldt in dit geval $dx/dt = a$ en $dy/dt = b$). Hierdoor wordt de waarde van u langs de beginkromme vastgelegd zodra u in één punt wordt gegeven.

- (ii) Als aan (2.4) voldaan is bestaan er oneindig veel oplossingen die door ℓ gaan. Kies maar een willekeurige kromme $\tilde{\ell}$ die ℓ snijdt, en bepaal de oplossing hierdoor. Omdat ℓ een karakteristiek is door $\tilde{\ell}$, ligt ℓ op de oplossing.

Bovenstaande voorwaarde (2.4) heet de *compatibiliteitsvoorwaarde*. De PDV operator $a u_x + b u_y$ is in dit geval een *inwendige* operator, omdat deze met uitsluitend informatie van ℓ bepaald kan worden.

2.2 Voorbeelden

In deze paragraaf geven we twee eenvoudige voorbeelden van een eerste orde vergelijking: een lineaire en een niet-lineaire. Het laatste geval blijkt toch niet zo eenvoudig te zijn.

Lineair

Beschouw het volgende lineaire beginwaardeprobleem

$$u_y + au_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

De vergelijking voor de karakteristieken is

$$dx/ds = a, \quad dy/ds = 1, \quad du/ds = 0,$$

zodat

$$x = x_0 + as, \quad y = y_0 + s, \quad u = u_0.$$

Invullen van de beginvoorwaarden in $s = 0$: $x = t$, $y = 0$, $u = f(t)$ levert

$$x = t + as, \quad y = s, \quad u = f(t).$$

Tot slot moeten we t en s elimineren, hetgeen resulteert in

$$t = x - ay, \quad u = f(x - ay).$$

We herkennen dat de karakteristieken rechte lijnen zijn, $x - ay = \text{constant}$, met helling $dx/dy = a$ welke gelijk is aan de voortplantingssnelheid.

Niet lineair

Bij niet-lineaire vergelijkingen komt er een complicatie bij, omdat de basiskarakteristieken elkaar dan kunnen gaan snijden. Dit zullen we illustreren met het volgende probleem

$$u_y + u u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

De karakteristieken worden gegeven door $dy/ds = 1$, $dx/ds = u$, $du/ds = 0$ met als oplossing

$$x = x_0 + u_0 s, \quad y = y_0 + s, \quad u = u_0.$$

Kies als beginkromme $x_0 = t$, $y_0 = 0$, $u_0 = f(t)$, zodat de karakteristieken worden

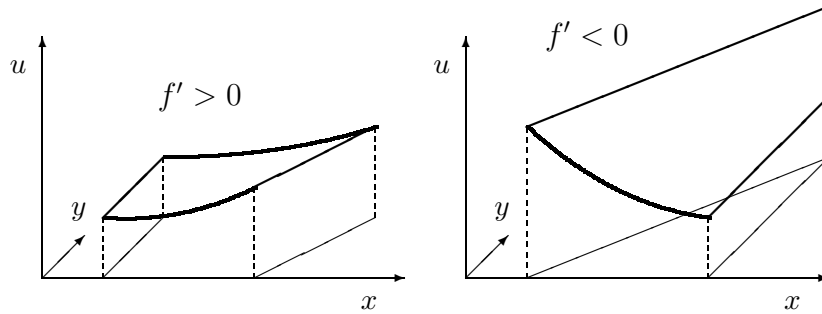
$$x = t + f(t) s, \quad y = s, \quad u = f(t).$$

Net als zojuist zien we, na eliminatie van s , dat de karakteristieken rechte lijnen zijn $x - uy = t$, waarlangs u constant is. Eliminatie van t leidt tot een impliciete relatie voor u : $u = f(x - uy)$.

De Jacobiaan van deze familie van karakteristieken wordt gegeven door

$$\Delta \equiv x_s y_t - x_t y_s = -1 - s f'(t).$$

Wanneer $s = -1/f'(t)$ wordt $\Delta = 0$. In dit soort punten (snijpunten van de karakteristieken, of punten van de omhullende) kunnen s en t niet meer geëlimineerd worden.



- Wanneer $f'(t) > 0$ vormen de basiskarakteristieken een uitwaaiërend stelsel (voor toenemende y). Ze snijden elkaar niet voor $y > 0$, en er zijn geen problemen met het vinden van de oplossing.
- Wanneer $f'(t) < 0$ lopen de basiskarakteristieken naar elkaar toe. Ze snijden elkaar, of vormen een omhullende, wanneer $\Delta = 0$ wordt, dat wil zeggen waar $y = -1/f'(t)$. Vanaf dit punt vinden we langs deze weg geen eenwaardige oplossing meer.

Neem als voorbeeld $f(t) = \alpha t$, zodat de oplossing wordt

$$u = \frac{\alpha x}{1 + \alpha y} \quad (1 + \alpha y > 0),$$

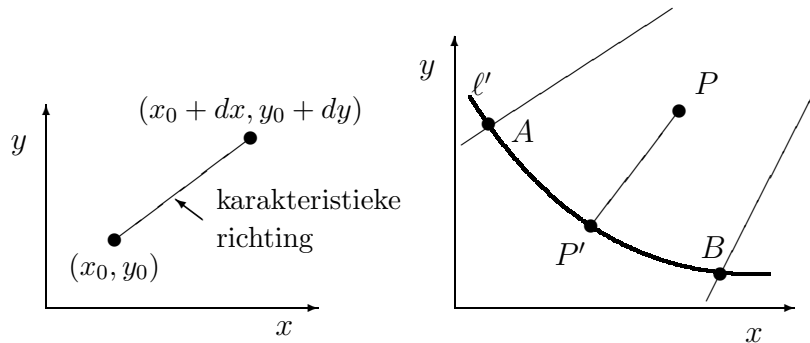
en we zien dat hier inderdaad problemen ontstaan wanneer $y = -1/\alpha$.

2.3 Informatie voortplanting

Wanneer we, in het geval van een scalaire eerste orde vergelijking, de oplossing ergens langs een karakteristiek kennen, dan ligt deze daarmee overal langs de karakteristiek vast. “Ergens langs een karakteristiek” betekent voor een gegeven punt (x, y) . In de praktijk gebeurt het vaak dat de y -richting correspondeert met de fysische tijd (t).

Beschouw nu een stukje karakteristiek rond het punt (x_0, y_0) . Deze heeft daar een helling $dx/dy = a/b$, met a en b de coëfficiënten uit de PDV (2.1). De karakteristiek gaat ook door het punt $(x_0 + dx, y_0 + dy)$; de oplossing daar is bepaald door de oplossing in (x_0, y_0) . We zien hieraan dat de informatie uit ‘het punt $x = x_0$ op tijdstip y_0 ’ op het tijdstip $y_0 + dy$ is doorgedrongen in het punt $x = x_0 + dx$. Het quotient dx/dy is daarmee een *voortplantingssnelheid* van informatie. Deze voortplantingssnelheid wordt dus gegeven door de karakteristieke richting.

We beschouwen nu alle basiskarakteristieken die gaan door een segment AB van een beginkromme ℓ' . De basiskarakteristieken door de eindpunten definiëren nu een gebied waar de oplossing bekend is zodra deze op AB gegeven is. Dit gebied heet het *bepaaldheidsgebied* van de beginkromme AB .

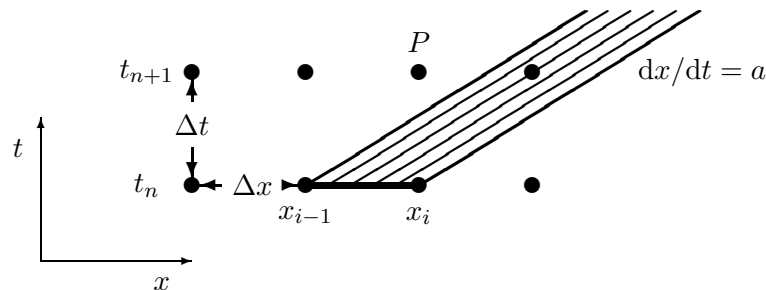


We kunnen ook kijken naar het deel van het (x, y) -vlak waar de oplossing beïnvloed wordt door de waarden op AB . In dit geval is dat weer het gebied tussen de buitenste karakteristieken. We spreken van het *invloedsgebied* van AB . Bij stelsels vergelijkingen gaan er door elk punt meerdere karakteristieken. Dan is in het algemeen het invloedsgebied groter dan het bepaaldheidsgebied (zie §3.2).

Tenslotte kun je je afvragen welke informatie nodig is om in een punt P de oplossing te berekenen. In ons geval is dat de oplossing in het snijpunt P' van de karakteristiek door P met AB : *afhankelijkheidsgebied* van P .

N.B. Voor het gemak is even aangenomen dat de basiskarakteristieken elkaar niet snijden; bij lineaire vergelijkingen is hieraan voldaan.

Voorbeeld



Beschouw op het tijdstip $t = t_n$ een segment $[x_{i-1}, x_i]$ in een rekenrooster (voor een eindigedifferentie methode bijvoorbeeld). Op dit gebied beschouwen we als PDV het eerste voorbeeld uit §2.2

$$u_y + au_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

met als karakteristieken de rechte lijnen $x - ay = \text{constant}$. Beschouw het bepaaldheidsgebied van dit segment, dat gevormd wordt door alle karakteristieken die door dit segment gaan - stel het is het gearceerde deel in de figuur. In de geschetste situatie ligt het punt $P = (x_i, t_{n+1})$ buiten het bepaaldheidsgebied. Voor de analytische vergelijking geldt dat de waarde in P *niet* bepaald kan worden als je alleen maar informatie over het segment $[x_{i-1}, x_i]$ hebt. Het zou *vreemd* zijn als je met een numerieke methode hier *wel* toe in staat zou zijn. Dat blijkt dus ook niet te kunnen; de numerieke methode wordt instabiel. De stabiliteitsgrens wordt vaak $a\Delta t < \Delta x$, hetgeen equivalent is met ' P ligt in het bepaaldheidsgebied van $[x_{i-1}, x_i]$ '.

2.4 Discontinuïteiten bij lineaire vergelijkingen

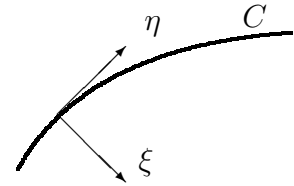
Het niet-lineaire voorbeeld uit §2.2 geeft al aan dat in de praktijk differentieerbaarheid van een oplossing wel eens teveel gevraagd kan zijn. Op welke plaatsen kunnen we problemen verwachten?

Stel er is een kromme C waaroverheen de oplossing niet differentieerbaar is, maar nog wel continu. Voer een lokaal coördinatensysteem in (ξ, η) . Dan zijn u en u_η continu over C , maar u_ξ niet. Wel geldt aan weerszijden de PDV

$$au_x + bu_y = c,$$

waarin de coëfficiënten a , b en c alleen van x en y afhangen. Omgeschreven in ξ en η komt er

$$(a\xi_x + b\xi_y)u_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)u_\eta = c.$$



Wanneer we langs de kromme C aan weerszijden deze uitdrukking nemen, en deze van elkaar aftrekken dan komt er (omdat alles continu is op u_ξ na)

$$(a\xi_x + b\xi_y)[u_\xi] = 0,$$

waarbij $[u_\xi]$ de sprong in u_ξ over C voorstelt. Als deze sprong $\neq 0$ moet zijn, dan lukt dat alleen als

$$a\xi_x + b\xi_y = 0.$$

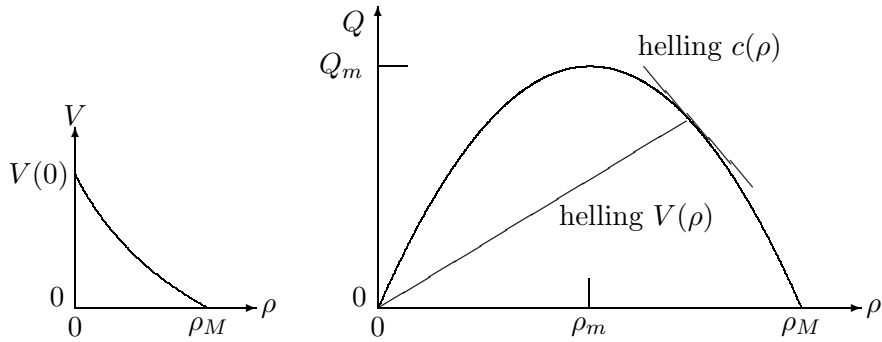
Hier staat net het inproduct van (a, b) met de normaal (ξ_x, ξ_y) op de kromme $\xi = \text{constant}$. Dus $\xi = \text{constant}$ raakt aan (a, b) , waaruit volgt dat $\xi = \text{constant}$ een (basis-)karakteristiek is.

We zien dus dat bij lineaire vergelijkingen met continue coëfficiënten discontinuïteiten in de afgeleiden van de oplossing alleen mogelijk zijn over karakteristieken. Als je terug kijkt hoe ze zijn ontstaan, dan zul je merken dat je ze er zelf bij de beginvoorwaarde in hebt gestopt; vanzelf ontstaan ze niet.

In Hoofdstuk 4 zullen we naar niet-lineaire vergelijkingen kijken; hierbij kunnen discontinuïteiten ook langs andere krommen optreden. De oplossing kan in dit geval zelfs ‘spontaan’ discontinu worden. Een eerste voorbeeld hiervan hebben we in § 2.2 al gezien; een verder voorbeeld staat hieronder.

2.5 File vorming bij verkeerslichten

Als meer uitgewerkt voorbeeld gaan we nu kijken naar het gedrag van verkeersstromen. Bekijk een stuk weg waarop auto's rijden met een dichtheid van $\rho(x)$ auto's per kilometer. We nemen aan dat hun snelheid een afnemende functie is van de dichtheid: de snelheid $V(\rho)$ is maximaal $V(0)$ als $\rho = 0$, en neemt af tot $V = 0$ op het moment dat de auto's bumper aan bumper staan met dichtheid ρ_M . De totale doorstroming, d.w.z. de hoeveelheid auto's die per tijdseenheid een plaats x passeren, wordt gegeven door $Q(\rho) \equiv \rho V(\rho)$. We merken op dat $Q(\rho)$ nul wordt bij $\rho = 0$ en bij $\rho = \rho_M$. Daar tussenin bezit Q een maximum waarde Q_m bij een dichtheid ρ_m . In de praktijk blijkt Q een bolle functie van ρ te zijn. In de figuur schetsen we V en Q als functie van ρ .



Er kunnen onderweg geen auto's verdwijnen, dus het verloop van de hoeveelheid auto's op een gegeven stuk weg $[x_1, x_2]$ wordt bepaald door de auto's die dit segment binnenrijden c.q. verlaten

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + Q|_{x_2} - Q|_{x_1} = 0. \quad (2.5)$$

Omdat dit voor elk wegsegment moet gelden, levert dit de volgende PDV

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Gebruiken we dat Q een functie is van ρ , dan ontstaat

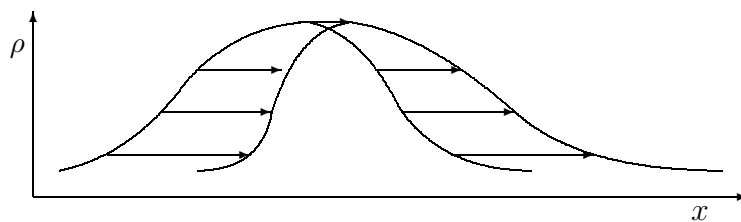
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + Q'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (2.6)$$

Uit de vorige paragrafen weten we dat deze PDV karakteristieken bezit met helling $Q'(\rho)$. Langs deze karakteristieken is ρ constant. Daardoor zijn de karakteristieken rechte lijnen. De helling geeft de voortplantingssnelheid c aan voor (golfvormige) verstoringen. Er geldt

$$c(\rho) \equiv Q'(\rho) = V(\rho) + \rho V'(\rho).$$

Omdat $V'(\rho) < 0$, is deze voortplantingssnelheid altijd kleiner dan de snelheid van de auto's. Golven planten zich achterwaarts voort door de verkeersstroom en chauffeurs worden zo gewaarschuwd voor problemen verderop. Verder zien we dat voor $\rho > \rho_m$, de golven zich ook t.o.v. de weg naar achteren voortplanten.

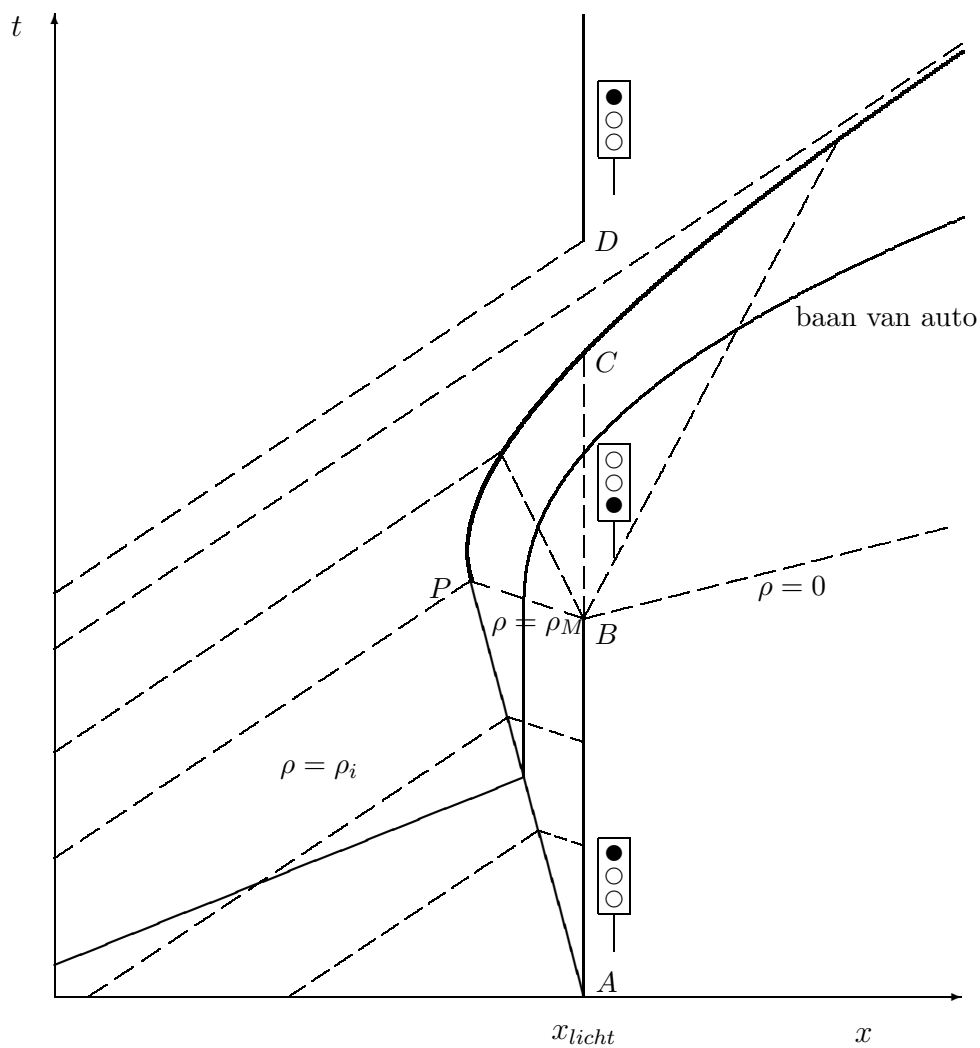
Aan het bolle gedrag van Q in de figuur zien we dat $c'(\rho) < 0$, hetgeen inhoudt dat bij kleine ρ golven sneller naar rechts lopen dan bij grote ρ . Laten we nu eens een stuk weg bekijken waarop een verdichting van auto's plaatsvindt. De figuur hieronder toont het verloop van ρ . Omdat elk van de punten op deze kromme zijn eigen karakteristieke richting heeft, verplaatsen deze punten zich met verschillende snelheid. Enige tijd later zal het profiel van achteren opgesteild zijn (zie figuur, waarin $\rho < \rho_m$).



Nog weer later ontstaat er gevaar voor meerwaardigheid van de oplossing (zoals in het niet-lineaire voorbeeld in §2.2), waar we in §4.6 nog in detail op terug zullen komen. Auto's komen dus van achteren in zo'n opstopping terecht, moeten fors remmen en kunnen bij het verlaten de snelheid maar langzaam weer opvoeren.

Verkeerslichten

We kunnen deze theorie gebruiken om de afstelling van verkeerslichten te analyseren. Hieronder staat een (x, t) -diagram waar op $x = x_{licht}$ een verkeerslicht is geplaatst. Van links komt een gestage stroom auto's met dichtheid $\rho = \rho_i$, waarvan we aannemen dat deze kleiner is dan ρ_m . Verder nemen we aan dat het verkeerslicht lang genoeg op groen staat zodat aan het eind van de groene periode auto's volledig ongestoord kunnen doorrijden met de inkomende dichtheid ρ_i .



In de figuur kunnen we dus van links naar rechts karakteristieken trekken met helling $c(\rho_i)$, waarlangs $\rho = \rho_i$. Ter plekke van het verkeerslicht staan nog auto's te wachten, hier is $\rho = \rho_M$. Hier vandaan vertrekken karakteristieken naar links met helling $dx/dt = c(\rho_M) < 0$, waarlangs

$\rho = \rho_M$ en $V = 0$. Deze karakteristieken botsen op een gegeven moment met de van links komende karakteristieken.

In §4.6 gaan we precies bepalen hoe de confrontatie tussen de karakteristieken plaats vindt. Hier lopen we nu enigszins op vooruit door te stellen dat er een grenslijn ontstaat. Links hiervan wordt de oplossing bepaald door de karakteristieken die van links komen; rechts hiervan wordt de oplossing bepaald door de situatie bij het verkeerslicht. Links van de 'rand' AB staan auto's te wachten met $\rho = \rho_M$. Rechts van deze rand zijn geen auto's, zodat hier $\rho = 0$. In het punt B is ρ dus meerwaardig; we mogen aannemen dat hier ook alle tussenliggende waarden van ρ worden aangenomen. Vanuit dit punt B vertrekken dus karakteristieken met hellingen $c(\rho)$, corresponderend met $c(\rho_M) \leq c(\rho) \leq c(0)$. Langs elk van deze karakteristieken is ρ constant. Een hele speciale karakteristiek is die met helling $dx/dt = 0$. Dit is de lijn BC in de figuur. We concluderen dat langs deze karakteristiek $c(\rho) = 0$, waaruit volgt dat $\rho = \rho_m$. Dus ter plekke van het verkeerslicht is de verkeersstroom maximaal, en gelijk aan Q_m .

We kunnen nu uitrekenen hoe lang het licht op groen moet staan opdat aan het einde van de periode het verkeer ongestoord kan doorrijden. De totale stroom door het groene licht wordt gegeven door

$$(t_C - t_B) Q_m + (t_D - t_C) Q_i,$$

en dit moet gelijk zijn aan de hoeveelheid inkomende auto's

$$(t_D - t_A) Q_i.$$

In het randgeval zullen C en D samenvallen, waarmee de volgende eis ontstaat voor de duur van de groene periode

$$t_{groen} \geq \frac{Q_i}{Q_m - Q_i} t_{rood}.$$

Wanneer hier niet aan voldaan is wordt het verkeerspatroon veel gecompliceerder. We komen hier in §4.6 op terug.

Tot slot tekenen we in de figuur nog de weg die een auto aflegt: deze komt aanrijden met snelheid $V(\rho_i)$, moet daarna een tijdje wachten, en kan tenslotte met toenemende snelheid weer doorrijden.

Hoofdstuk 3

KLASSIFICATIE VAN PDV'S

3.1 Eerste orde stelsels in twee onafhankelijke variabelen

We beginnen met quasi-lineaire n -dimensionale eerste orde vergelijkingen in twee variabelen x en t van de gedaante

$$u_t + A(x, t, u) u_x = b(x, t, u), \quad (3.1)$$

met $u, b \in \mathbb{C}^n$ en $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

De eigenwaarden van A , die voldoen aan $\det|\lambda I - A| = 0$, spelen een zeer belangrijke rol bij de *klassificatie* van dit stelsel.

Definitie 3.1 Het stelsel (3.1) heet:

- *strikt hyperbolisch* [K & L]¹ of *totaal hyperbolisch* [C & H] als alle eigenwaarden van A reëel en verschillend zijn;
- *sterk hyperbolisch* [K & L] als de eigenwaarden van A reëel zijn en er een volledig stelsel eigenvectoren bestaat;
- *zwak hyperbolisch* [K & L] of *parabolisch* [Z] als de eigenwaarden reëel zijn maar de matrix defect;
- *elliptisch* als alle eigenwaarden zuiver imaginair zijn.

Het eerste geval komt in de praktijk weinig voor. Situaties met complexe eigenwaarden of met reële en imaginaire eigenwaarden worden niet benoemd. We zullen ze wel tegenkomen.

De vorm (3.1) is niet de meest algemene, want deze veronderstelt dat de coëfficiënt voor de term u_t op de eenheidsmatrix kan worden geschaald. Algemener is

$$A(x, t, u)u_t + B(x, t, u)u_x = b(x, t, u). \quad (3.2)$$

De generalisatie van het bovenstaande leidt nu tot het eigenwaardeprobleem

$$\det|\lambda A - B| = 0. \quad (3.3)$$

Merk op dat we ook hadden kunnen nemen $\det|A - \lambda B| = 0$, want voor het reëel zijn van de eigenwaarden en het volledig zijn van het stelsel eigenvectoren maakt dit niets uit.

¹Deze en soortgelijke afkortingen verwijzen naar de literatuur die in het voorwoord is vermeld.

Voorbeelden

- De *potentiaalvergelijking*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = 0$$

heeft een anti-symmetrische coëfficiënten matrix met eigenwaarden $\pm i$. Hij is dus elliptisch.

- De *golfvergelijking*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = 0$$

heeft een symmetrische coëfficiënten matrix met eigenwaarden ± 1 . Hij is dus strikt hyperbolisch.

- De *warmtegeleidingsvergelijking* $u_t = u_{xx}$ kan via $u_x = p$ worden herschreven tot het eerste orde stelsel

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Het eigenwaardeprobleem (3.3) leidt nu tot een dubbele wortel $\lambda = \infty$ (het was handiger geweest de alternatieve formulering te nemen, waarvoor $\lambda = 0$ wordt). We zien ook dat de eerste coëfficiëntenmatrix defect is, terwijl de andere coëfficiënt de eenheidsmatrix is. Het probleem is daarmee parabolisch.

3.2 Karakteristieken en invarianten

We zullen nu nader kijken naar sterk hyperbolische stelsels. Deze zijn diagonaliseerbaar, $A = SAS^{-1}$, waarmee het stelsel kan worden herschreven als

$$u_t + SAS^{-1}u_x = b.$$

We gaan deze vergelijkingen met elkaar combineren door te vermenigvuldigen met S^{-1}

$$S^{-1}u_t + \Lambda S^{-1}u_x = S^{-1}b.$$

Wanneer (3.1) lineair is met constante coëfficiënten, dat wil zeggen A is constant, kunnen we overgaan op nieuwe onbekenden - *karakteristieke variabelen* -

$$\varphi = S^{-1}u. \tag{3.4}$$

Dan wordt het stelsel (wegens $S = \text{constant}$)

$$\varphi_t + \Lambda \varphi_x = S^{-1}b. \tag{3.5}$$

Omdat Λ een diagonaal matrix is, zijn de linkerleden ontkoppeld. We krijgen voor elke component φ_i van φ een vergelijking

$$(\varphi_i)_t + \lambda_i(\varphi_i)_x = (S^{-1}b)_i.$$

We hebben de structuur uit Hoofdstuk 2 verkregen, en zien dat de krommen met $dx/dt = \lambda_i$ (basis)karakteristieken zijn. Via het rechterlid b , dat van u mag afhangen, zijn deze vergelijkingen onderling wel gekoppeld.

Voor het geval dat $b \equiv 0$ zien we dat φ_i constant is langs de corresponderende karakteristiek. We noemen φ_i dan een *karakteristieke invariant* of *Riemann invariant*.

Voorbeeld *Golfvergelijking*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = 0$$

Karakteristieke richtingen $dx/dt = \pm 1$. De bijbehorende eigenvectoren zijn $(1, -1)^t$ en $(1, 1)^t$ ($\lambda = 1$ resp. $\lambda = -1$). De diagonalisatiematrix S en zijn inverse worden nu gegeven door

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daarmee volgen als karakteristieke invarianten

$$\begin{cases} u - v & \text{is constant langs lijnen } x - t = \text{constant,} \\ u + v & \text{is constant langs lijnen } x + t = \text{constant.} \end{cases}$$

We concluderen

$$\begin{aligned} u - v &= f(x - t), \\ u + v &= g(x + t), \end{aligned}$$

zodat bijvoorbeeld de algemene oplossing voor u eruit ziet als

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x - t) + \frac{1}{2}g(x + t).$$

De beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = U(x), \quad v(x, 0) = V(x)$$

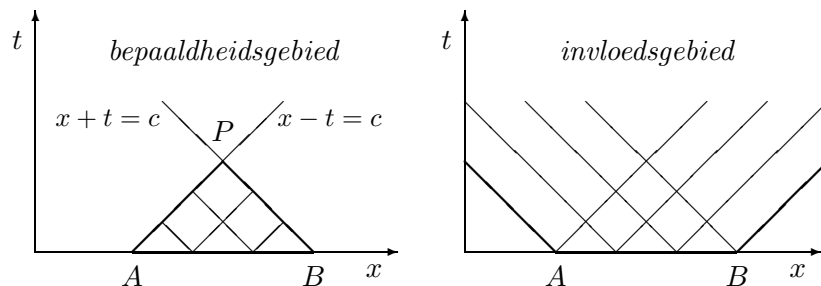
leggen de oplossing vast door de karakteristieke invarianten terug te rekenen naar de beginkromme. Zo volgt

$$\begin{aligned} (u - v)(x, t) &= (u - v)(x - t, 0) = U(x - t) - V(x - t), \\ (u + v)(x, t) &= (u + v)(x + t, 0) = U(x + t) + V(x + t). \end{aligned}$$

Hiermee wordt

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\{U(x + t) + U(x - t)\} + \frac{1}{2}\{V(x + t) - V(x - t)\}.$$

We zien dat voor dit probleem de oplossing in een bepaald punt P bepaald wordt door informatie over de twee karakteristieke die de x -as snijden in de punten A en B (zie figuur).

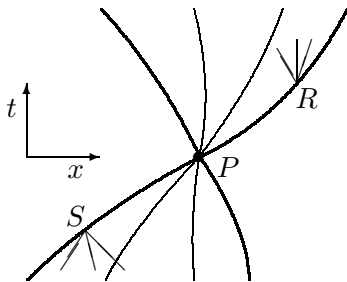


Eenvoudig is te zien dat het gearceerde deel in het linker plaatje gevonden kan worden met uitsluitend informatie van het segment AB : we noemen dit het *bepaaldheidsgebied* van AB .

Het rechterplaatje geeft het gebied waar de informatie uit het segment nodig is om de oplossing te kunnen vinden: *invloedsgebied* van AB . Buiten dit gebied zijn veranderingen tussen A en B niet zichtbaar.

Informatie voortplanting

Door elk punt van het (x, t) -vlak gaan n karakteristieken. Langs elke karakteristiek geldt een gewone DV. De oplossing van de PDV is te construeren d.e.s.d. als langs elk van deze karakteristieken de bijbehorende φ_i bekend zijn. We zien dat informatie zich langs karakteristieken voortplant. In het geval van constante coëfficiënten is er geen koppeling tussen de φ_i ; in het andere geval wel, deze uit zich in het rechterlid van (3.5).

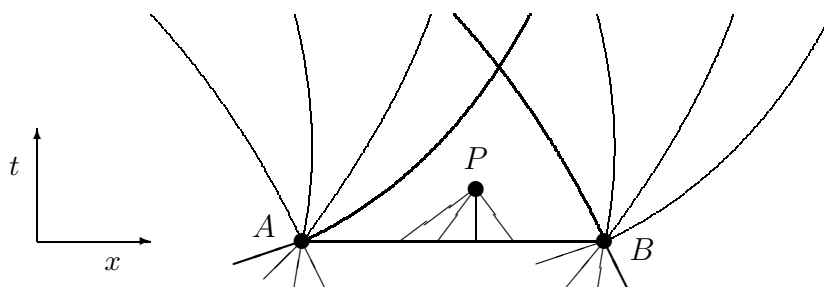


We gaan nu eens kijken naar een punt P in het (x, t) -vlak en de karakteristieken hierdoor. Voorlopig alleen voor lineaire vergelijkingen; deze karakteristieken hangen dan niet van de oplossing af. De buitenste karakteristieken door P , dat wil zeggen die met dx/dt is maximaal en dx/dt is minimaal, spannen een sector op in het (x, t) -vlak. We kunnen een voorwaarts en een achterwaarts deel onderscheiden (zie figuur).

Verleden Laten we eerst eens kijken naar het achterwaartse deel van de karakteristieken door P . Wanneer langs elk van de karakteristieken de oplossing bekend is, is die in P ook bekend. Verder geldt dat voor elk punt in dit gebied (bijvoorbeeld S) de binnenkomende karakteristieken vanuit het gearceerde deel komen. Er kan dan geen informatie van buiten dit gebied binnendringen. De oplossing in P hangt dus alleen af van wat er in het gearceerde gebied gebeurt; we noemen dit het *afhankelijkheidsgebied* van P (Engels: domain of dependence).

Toekomst Beschouw nu het voorwaartse deel van de karakteristieken door P . Langs deze karakteristieken plant informatie vanuit P zich voorwaarts. Voor elk punt in het gearceerde gebied geldt dat de uitgaande karakteristieken in dit gebied blijven. Informatie over het punt P kan niet buiten dit gebied terechtkomen. De oplossing in punt P beïnvloedt alleen het gearceerde gebied; we noemen dit het *invloedsgebied* van P (Engels: domain of influence). De oplossing in het invloedsgebied van P ligt niet vast als we alleen de oplossing in P kennen, want in bijvoorbeeld R komen karakteristieken van buiten dit gebied binnen.

Beschouw nu een lijnstuk AB en de karakteristieken door de eindpunten. Speciaal de meest rechtse karakteristiek door A en de meest linkse karakteristiek door B zijn van belang. Deze sluiten een gebied in dat in de figuur is gearceerd. Alle karakteristieken door punten in dit gebied, zoals P , snijden AB . Er kan geen informatie binnendringen door de 'karakteristieke' zijden van dit gebied. De oplossing in dit gebied is dus volledig bepaald wanneer op AB de oplossing bekend is; we noemen dit het *bepaaldheidsgebied* van AB (Engels: domain of determinacy).



3.3 Tweede orde vergelijkingen met één afhankelijke variabele

Beschouw de tweede orde vergelijking (in 2-D)

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} = g(x, y, u, u_x, u_y). \quad (3.6)$$

Deze vergelijking wordt geklassificeerd analoog aan de classificatie van kwadratische oppervlakken. De *discriminant* $b^2 - ac$ speelt de sleutelrol.

We laten eerst zien dat het teken van de discriminant een invariant van de PDV is onder coördinaten transformaties. Beschouw de transformatie $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ met $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$ (regulariteit). Via bekende regels als

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \dots \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + \text{termen met } u_\xi \text{ en } u_\eta \end{aligned}$$

vinden we

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \dots,$$

met

$$\begin{aligned} \alpha &= a(\xi_x)^2 + 2b\xi_x \xi_y + c(\xi_y)^2, \\ \beta &= a\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c\xi_y \eta_y, \\ \gamma &= a(\eta_x)^2 + 2b\eta_x \eta_y + c(\eta_y)^2. \end{aligned}$$

Er geldt $\beta^2 - \alpha\gamma = (b^2 - ac)(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2 = (b^2 - ac)J^2$, dus het teken is invariant.

Zet nu de tweede orde vergelijking om in een stelsel eerste orde vergelijkingen. Definiëer $p = u_x$ en $q = u_y$, dan ontstaat

$$\begin{cases} ap_x + b(p_y + q_x) + cq_y = g(x, y, u, p, q) \\ p_y - q_x = 0 \end{cases}$$

Gehergroepeerd

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

We zoeken weer de karakteristieke richtingen $dy/dx = \lambda$. Deze kunnen worden berekend met de determinantvoorwaarde (3.3): $|\lambda A - B| = 0$.

$$\begin{vmatrix} \lambda a - b & \lambda b - c \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0.$$

(i) Als $b^2 - ac > 0$ zijn er twee reële karakteristieken: *hyperbolisch*

(ii) Als $b^2 - ac = 0$ is er een dubbele karakteristieke richting λ . Traditioneel heet dit geval *parabolisch*. Er is na te gaan dat er maar één eigenvector (karakteristieke variabele) bestaat.

(iii) Als $b^2 - ac < 0$ zijn er geen reële karakteristieke richtingen: *elliptisch*

Let op: De naamgeving voor tweede orde vergelijkingen is niet volledig consistent met die voor stelsels eerste orde vergelijkingen die in §3.1 behandeld is. De verschillen treden op bij meervoudige karakteristieke richtingen (geval (ii)).

Voorbeelden

- (i) hyperbolisch $b^2 - ac > 0$: $\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$, $\varphi_{xy} = 0$
(ii) parabolisch $b^2 - ac = 0$: $\varphi_x = \varphi_{yy}$
(iii) elliptisch $b^2 - ac < 0$: $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$

De gegeven voorbeelden noemen we de *normaalvormen* voor de corresponderende types.

Meer dan twee ruimtedimensies

We kunnen een tweede orde vergelijking ook in meer ruimte dimensies bekijken. De notatie veranderen we daarvoor tot (zie (1.5))

$$\sum_{i,j=1}^s a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^s b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0. \quad (3.7)$$

De coëfficiënten van het tweede orde deel zijn nu in een matrix gegroepeerd: $A = (a_{ij})$. In het 2-D geval geldt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

We kunnen altijd A symmetrisch maken omdat de volgorde van differentiëren verwisseld mag worden normaal gesproken.

De eigenwaarden van A voldoen aan

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda - (b^2 - ac) = 0;$$

ze zijn altijd reëel (ga na). In het hyperbolische geval ($b^2 - ac > 0$) is er één positieve en één negatieve eigenwaarde; elliptisch ($b^2 - ac < 0$) hebben ze beide hetzelfde teken; parabolisch ($b^2 - ac = 0$) is één eigenwaarde gelijk aan 0.

Deze definitie is te generaliseren naar meer dimensies. Beschouw de coëfficiënten matrix $A = (a_{ij})$ uit (3.7).

Definitie 3.2 Het stelsel (3.7) heet:

- elliptisch als alle eigenwaarden van (a_{ij}) hetzelfde teken hebben;
- parabolisch als één (of meer) eigenwaarden 0 zijn;
- hyperbolisch als één eigenwaarde een teken heeft dat verschilt van alle andere.

Voorbeelden

$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$	3-D potentiaalvergelijking
$u_t - \Delta u = 0$	3-D warmtegeleidingsvergelijking
$u_{tt} - \Delta u = 0$	3-D golfvergelijking

Opmerking Het parabolische geval met meer dan één eigenwaarde gelijk aan 0 wordt in de theoretische literatuur niet bestudeerd. Toch komt dit wel voor, namelijk bij 3-D grenslaagstromingen. Als modelprobleem kan hier genomen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

dat wil zeggen een standaard convectief proces met diffusie alleen loodrecht op het oppervlak.

3.4 Voorbeelden uit de stromingsleer

Alle bovenstaande types, inclusief mengvormen, komen in de stromingsleer voor. We illustreren dit aan de hand van:

- i) de isentrope Euler vergelijkingen;
- ii) de ondiep-water vergelijkingen.

Isentrope Euler vergelijkingen

Beschouw een isentrope stroming met snelheid u , dichtheid ρ en druk p . De stroming is te beschrijven met behoudswetten voor massa en impuls.

Massabehoud (continuïteitsvergelijking)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho u \cdot n \, dS = 0. \quad (3.8)$$

Impulsbehoud in i -richting ($i = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i \, dV + \int_S \rho u_i u \cdot n \, dS + \int_S p n_i \, dS = 0. \quad (3.9)$$

Energiebehoud wordt benaderd door de aanname dat de entropie constant is. In dat geval is p een functie van ρ :

$$p = p(\rho) \text{ met } \frac{dp}{d\rho} = c^2 > 0. \quad (3.10)$$

Hierin is $c = c(\rho)$ de geluidssnelheid; voor achtergrond zie college Stromingsleer.

De stelling van Gauss levert

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \operatorname{div}(\rho u_i u) + (\operatorname{grad} p)_i &= 0, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Door de behoudswet voor massa met die voor impuls te combineren, gaat laatstgenoemde over in

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + (u \cdot \operatorname{grad}) u_i + \frac{1}{\rho} (\operatorname{grad} p)_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

De index i wordt meestal weggelaten; de convectie operator is uitgeschreven

$$u \cdot \text{grad} = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Tenslotte kunnen we de p - ρ relatie (3.10) gebruiken. Dan ontstaat het stelsel

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad}) u + \frac{c^2}{\rho} \text{grad} \rho &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Deze vergelijking staat niet in behoudsvorm, maar is wat eenvoudiger dan (3.11) en daarom gaan we deze vergelijking verder op karakter analyseren. Twee speciale gevallen bekijken we: i) instationaire stroming in 1-D; ii) stationaire stroming in 2-D. Het meerdimensionale geval kunnen we op dit moment nog niet benoemen.

• Instationair isentrop Euler in 1-D

Uitgeschreven worden de vergelijkingen

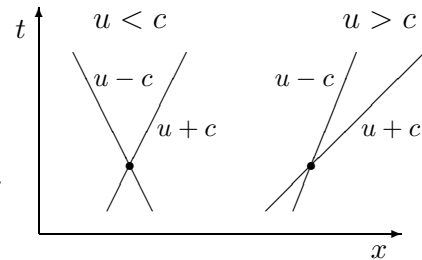
$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}_x = 0 \quad (3.13)$$

met als karakteristieke richtingen

$$\frac{dx}{dt} = u + c \text{ en } u - c.$$

Beide richtingen zijn reëel \Rightarrow het stelsel is hyperbolisch.

Twee gevallen zijn nu te onderscheiden: $u < c$ en $u > c$.



- (i) Voor $u < c$, i.e. subsonic stroming, wijst één karakteristiek naar links en één naar rechts.
- (ii) Voor $u > c$, i.e. supersonic stroming, wijzen beide karakteristieken naar rechts. In dit geval is er dus alleen informatievoortplanting in stroomafwaartse richting.

We merken op dat de bijdragen $+c$ en $-c$ in de karakteristieke richtingen afkomstig zijn van het produkt van de kruistermen in de coëfficiëntenmatrix in (3.13). Op hun beurt zijn deze termen weer afkomstig van de term $\rho \partial u / \partial x$ in de continuïteitsvergelijking en de term $(c^2/\rho) \partial \rho / \partial x$, d.w.z. de drukgradient, in de impulsvergelijking. Genoemde termen worden dan ook het *acoustische* deel van de stromingsvergelijkingen genoemd. De bijdrage u in de karakteristieke richtingen komt van de diagonaal in (3.13), en verder teruggaand van de term $u \partial \rho / \partial x$ in de continuïteitsvergelijking en de term $u \partial u / \partial x$ in de impulsvergelijking. Deze termen vormen het *convectieve* deel van de vergelijkingen.

• Stationair isentrop Euler in 2-D

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ c^2/\rho & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \end{pmatrix}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} v & 0 & \rho \\ 0 & v & 0 \\ c^2/\rho & 0 & v \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \end{pmatrix}_y = 0 \quad (3.14)$$

De karakteristieke richtingen $dy/dx = \lambda$ volgen weer uit $|\lambda A - B| = 0$.

$$\begin{vmatrix} \lambda u - v & \lambda \rho & -\rho \\ \lambda c^2/\rho & \lambda u - v & 0 \\ -c^2/\rho & 0 & \lambda u - v \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda u - v)[(u^2 - c^2)\lambda^2 - 2uv\lambda + v^2 - c^2] = 0$$

Een oplossing is $\lambda = v/u$; dus de stroomlijnen vormen een stel (basis)karakteristieken. De overige twee karakteristieke richtingen volgen uit de wortels van de vierkantsvergelijking tussen $[\dots]$. Zijn discriminant is $4c^2(u^2 + v^2 - c^2)$. Dus:

- als $u^2 + v^2 > c^2$ zijn er 3 reële richtingen;
- als $u^2 + v^2 < c^2$ zijn er 1 reële en 2 complexe richtingen.

De stationaire Euler vergelijkingen zijn dus:

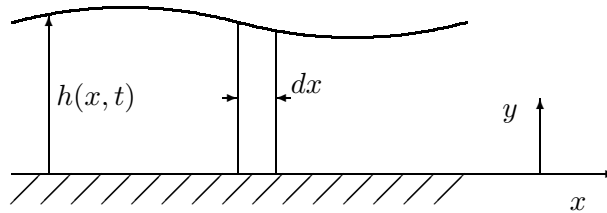
- voor supersone stroming hyperbolisch;
- voor subsone stroming gemengd hyperbolisch/elliptisch.

Ondiep-water vergelijkingen

We beschouwen stroming in ondiep water. Hierbij nemen we aan dat de horizontale snelheid constant is langs een verticale doorsnede. De term $v \partial u / \partial y$ verdwijnt hierdoor uit de convectieve termen in de impulsvergelijking. Verder wordt aangenomen dat de druk gelijk is aan de hydraulische druk, d.w.z.

$$p(x, y, t) = g\rho(h - y) + p_{opp}, \quad (3.15)$$

waarin g de zwaartekracht representeert. We verwaarlozen tenslotte de viscositeit. Daardoor zijn de basisvergelijkingen de boven beschreven Euler vergelijkingen waarin we $\rho = 1$ invullen (incompressibele stroming).



Massabehoud beschouwen we in een verticale kolom (zie figuur). Links stroomt binnen uh ; rechts stroomt weg $uh + (uh)_x dx$; het oppervlak stijgt $h_t dx$. Balans levert

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0.$$

Impulsbehoud in het horizontale vlak met de druk aanname (3.15) ingevuld levert

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Er ontstaat een hyperbolisch stelsel met als karakteristieke richtingen

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{gh}$$

We zien dat \sqrt{gh} het analogon is van de geluidssnelheid voor akoestische golven: het is de voortplantingssnelheid van oneindig kleine oppervlakte golven. De karakteristieke richting met het '+'-teken neemt toe als functie van h . Dit veroorzaakt het opstelen van oppervlaktegolven aan hun 'voorkant' (en leidt uiteindelijk tot het overslaan zoals we dat bijvoorbeeld in de branding zien, maar daar zijn de ondiep-water vergelijkingen niet meer echt geldig). Zie verder Opgaven 10 en 11 (Appendix B).

Hoofdstuk 4

HYPERBOLISCHE BEGIN- EN RANDWAARDE PROBLEMEN

4.1 Riemann invarianten

We beginnen bij §3.1, en bekijken een sterk hyperbolisch stelsel

$$u_t + Au_x = 0, \quad u \in \mathbb{C}^n, \quad A \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

De matrix A heeft een volledig stelsel eigenvectoren en reële eigenwaarden. Met de eigenvectoren vormen we een transformatiematrix S , zodat

$$A = S\Lambda S^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Hiermee is de vergelijking te herschrijven tot

$$S^{-1}u_t + \Lambda S^{-1}u_x = 0.$$

Bij variabele coëfficiënten en/of niet-lineaire vergelijkingen zullen Λ en S een functie zijn van x , t en/of u .

Graag zouden we zien dat deze vergelijking een totale afgeleide langs de bijbehorende karakteristieken voorstelt. Daartoe moeten we deze kunnen schrijven in de vorm

$$\psi_t + \Lambda\psi_x = 0, \quad (4.2)$$

waarin ψ een, handig gekozen, functie van u is. Wanneer A niet van x en t afhangt, dan kunnen we kiezen $\psi = S^{-1}u$, zoals in §3.2.

In het algemene geval is het lastiger om de vorm (4.2) te verkrijgen. Wanneer S^{-1} niet van x en t afhangt zouden we

$$\psi = \int^u S^{-1}(u) du \quad (4.3)$$

kunnen nemen, immers $\partial\psi/\partial t = d\psi/du \partial u/\partial t = S^{-1}u_t$. Maar omdat u een vector en S^{-1} een matrix is, is dit een uitdrukking die ingewikkelder is dan hij eruit ziet. Soms lukt het echter om hier iets mee te doen. Een voorbeeld hiervan vormen de Euler vergelijkingen uit §3.4, en behandelen we hieronder. Een ander voorbeeld vormen de ondiep-water vergelijkingen (zie Opgaven 10 en 11).

Isentroop Euler

De instationaire isentrope Euler vergelijkingen in 1-D kunnen worden geschreven als (zie §3.4)

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}_t + \underbrace{\begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}_x = 0 \quad (4.4)$$

De eigenwaarden van A zijn $u + c$ en $u - c$ met bijbehorende eigenvectoren $(\rho, c)^t$ en $(-\rho, c)^t$. Deze vectoren vormen de kolommen van de transformatiematrix S . De inverse van de transformatiematrix wordt gegeven door

$$S^{-1} = \frac{1}{2c\rho} \begin{pmatrix} c & \rho \\ c & -\rho \end{pmatrix}.$$

Na vermenigvuldiging van (4.4) met deze matrix ontstaat het volgende stelsel in diagonaalvorm

$$\begin{cases} \frac{1}{2\rho} \rho_t + \frac{1}{2c} u_t + (u+c) \left(\frac{1}{2\rho} \rho_x + \frac{1}{2c} u_x \right) = 0, \\ \frac{1}{2\rho} \rho_t - \frac{1}{2c} u_t + (u-c) \left(\frac{1}{2\rho} \rho_x - \frac{1}{2c} u_x \right) = 0. \end{cases}$$

Het is nu mogelijk om dit stelsel zo te schalen dat de ρ -afhankelijke coëfficiënten voor de afgeleiden van ρ komen te staan (bij isentrope stroming is c alleen een functie van ρ).

$$\begin{cases} \frac{c}{\rho} \rho_t + u_t + (u+c) \left(\frac{c}{\rho} \rho_x + u_x \right) = 0, \\ \frac{c}{\rho} \rho_t - u_t + (u-c) \left(\frac{c}{\rho} \rho_x - u_x \right) = 0, \end{cases}$$

of ook

$$\begin{cases} \frac{c}{\rho} \frac{d\rho}{ds} + \frac{du}{ds} = 0 & \text{langs } \frac{dx}{dt} = u + c, \\ \frac{c}{\rho} \frac{d\rho}{ds} - \frac{du}{ds} = 0 & \text{langs } \frac{dx}{dt} = u - c, \end{cases}$$

met $\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}$.

Omdat alle grootheden die van ρ afhangen nu bij elkaar staan zijn deze vergelijkingen te integreren tot (zie (4.3))

$$\begin{aligned} \int^\rho \frac{c}{\rho} d\rho + u &= \text{constant} & \text{langs } \frac{dx}{dt} = u + c, \\ \int^\rho \frac{c}{\rho} d\rho - u &= \text{constant} & \text{langs } \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De grootheden in het linkerlid zijn de *Riemann invarianten*.

4.2 In- en uitgaande karakteristieken

Bij het tot dusver bekeken Cauchy beginwaarde probleem was het ruimtelijke gebied onbegrensd. In de praktijk hebben we meestal te maken met begrensde ruimtelijke gebieden. Op de randen

hiervan moeten dan randvoorwaarden worden opgelegd om eenduidigheid van de oplossing te bereiken. We spreken nu van een begin/randwaarde probleem (Engels: IBVP = initial boundary value problem). Een belangrijke vraag is nu hoe deze randvoorwaarden gekozen kunnen resp. moeten worden?

We beginnen met één-dimensionale problemen gedefiniëerd op een strip $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$. Om gevoel te krijgen voor de problematiek als eerste een voorbeeld: de golfvergelijking

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x. \quad (4.6)$$

Deze vergelijking heeft karakteristieke variabelen $u+v$ en $u-v$ (zie § 3.2), welke we zullen aanduiden met φ_- en φ_+ respectievelijk. Ze corresponderen met karakteristieke richtingen $dx/dt = -1$ en $dx/dt = 1$, respectievelijk.

Het stelsel (4.6) is te herschrijven als

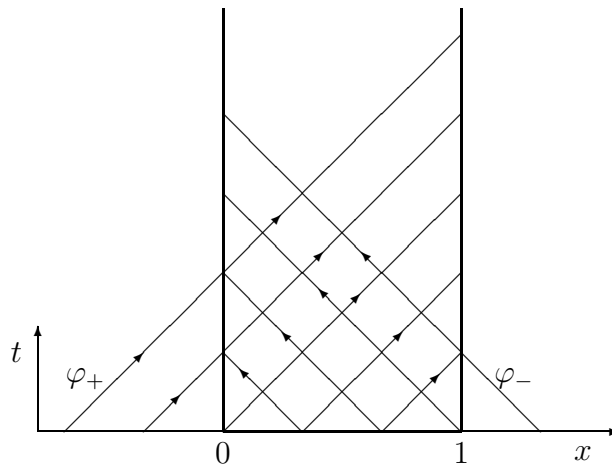
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_+ &\equiv \frac{d}{dt}(u-v) = 0 & \text{langs} & \frac{dx}{dt} = 1; \\ \frac{d}{dt}\varphi_- &\equiv \frac{d}{dt}(u+v) = 0 & \text{langs} & \frac{dx}{dt} = -1. \end{aligned}$$

Bij het zuivere beginwaarde probleem ligt de oplossing vast als we voor elke karakteristiek de bijbehorende variabele geven op $t = 0$. Voor een deel van de karakteristieken die door de strip lopen ligt dit punt buiten de strip. Wat ligt nu meer voor de hand dan de karakteristieke variabele te specificeren op het moment dat de karakteristiek de strip binnenkomt.

Dus als we in bovenstaand voorbeeld als randvoorwaarden opgeven

$$\text{links: } \varphi_+(0, t) = \text{gegeven,} \quad \text{en rechts: } \varphi_-(1, t) = \text{gegeven,} \quad (4.7)$$

dan loopt alles als vroeger. In (4.7) staan hele specifieke combinaties van u en v . We kunnen kijken of er meer algemene combinaties mogelijk zijn.



Bekijk eerst eens het voorschrijven van $\varphi_- = u + v$ op de linker rand. Op de naar links lopende karakteristiek is φ_- gegeven. Komend vanaf het inwendige ligt daarmee de waarde van φ_- op de linker rand vast. Deze waarde zal in het algemeen strijdig zijn met de voorgeschreven waarde. Dus: een *uitgaande* karakteristieke variabele mag *niet* voorgeschreven worden als randvoorwaarde.

Aan de manier waarop de oplossing wordt opgebouwd uit φ_+ en φ_- is duidelijk dat je op de *ingående* karakteristiek de beschikking moet hebben over de *ingående* variabele φ_+ . Eventueel mag deze uitgedrukt in φ_- (die immers bekend is op de rand). We komen zo uit op randvoorwaarden van het type

$$\begin{aligned} \text{links: } \quad \varphi_+(0, t) &= a_0 \varphi_-(0, t) + b_0, \\ \text{rechts: } \quad \varphi_-(1, t) &= a_1 \varphi_+(1, t) + b_1, \end{aligned} \quad (a_0, a_1 \neq \infty). \quad (4.8)$$

Geschreven als lineaire combinatie van u en v vinden we: Als we

$$c_u u + c_v v = \text{gegeven}$$

willen voorschrijven, dan moet in ieder geval

$$\text{links } c_u \neq c_v; \quad \text{rechts } c_u \neq -c_v.$$

We zullen in Hoofdstuk 5 zien dat dit in het één-dimensionale geval ook voldoende voorwaarden zijn om een goed-gesteld probleem op te leveren. In meer dimensies is dit niet het geval; daar mogen a_0 en a_1 uit (4.8) niet te groot zijn (zie §5.7). Zie ook Kreiss & Lorentz.

Voorbeelden van randvoorwaarden

Beschouw de 3-D isentrope Euler vergelijkingen (3.11), nu uitgeschreven in matrix notatie

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ c^2/\rho & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ c^2/\rho & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}_y + \dots = 0. \quad (4.9)$$

We gaan deze bestuderen in de buurt van een rand, bijvoorbeeld bij het vlak $x = 0$. Een essentiële rol spelen de karakteristieken van het 1-D probleem, gevonden door alle dwarsafgeleiden (in y - en z -richting) op 0 te stellen

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ c^2/\rho & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}_x = 0.$$

Gebruik makend van resultaten uit §4.1 vinden we als karakteristieke richtingen $u + c$, $u - c$ en u (2-voudig), met bijbehorende Riemann invarianten (4.5)

$$\int^\rho \frac{c}{\rho} d\rho + u, \quad \int^\rho \frac{c}{\rho} d\rho - u, \quad v \quad \text{en} \quad w.$$

Instroomrand Bekijk eerst het geval $u > 0$, dat wel zeggen er is instroming door de rand $x = 0$. Bij $u > c$ zijn alle eigenwaarden positief \Rightarrow er zijn vier randvoorwaarden nodig: we moeten dus ρ , u , v en w voorschrijven. Bij $0 < u < c$ zijn drie eigenwaarden positief \Rightarrow we moeten drie randvoorwaarden opgeven waaruit de drie ingaande Riemann invarianten te bepalen moeten zijn. Deze randvoorwaarden kunnen zijn ρ òf u (òf een combinatie van beide, maar niet alle twee!), v en w .

Uitstroomrand Bekijk vervolgens het geval $u < 0$, dat wil zeggen uitstroming door de rand $x = 0$. Wanneer $u < -c$ zijn alle eigenwaarden negatief \Rightarrow er is geen randvoorwaarde nodig. Wanneer $-c < u < 0$ is er één eigenwaarde positief \Rightarrow er is één randvoorwaarde nodig voor de ingaande Riemann invariant. Dit kan zijn ρ òf u òf een combinatie hiervan.

Wand Bij een wand op $x = 0$ geldt $u = 0$. Nu zijn er twee eigenwaarden $\equiv 0$, eentje positief en eentje negatief \Rightarrow één randvoorwaarde is nodig: dit is natuurlijk $u = 0$. Verder mag niets worden voorgeschreven. Dit geval levert numeriek veel problemen op omdat discreet de corresponderende eigenwaarden niet meer $\equiv 0$ worden, waardoor de met de wand samenvallende karakteristieken, afhankelijk van de discretisatiefout, ingaand (dan wel uitgaand) kunnen worden. In zo'n geval zijn numeriek wel weer randvoorwaarden vereist.

4.3 Zwakke oplossingen

In dit hoofdstuk gaan we dieper in op hyperbolische vergelijkingen en met name niet-lineaire vergelijkingen. In §2.4 hebben we al gezien dat de afgeleide van oplossingen van hyperbolische vergelijkingen discontinu kan zijn (over karakteristieken). We gaan nu een stap verder: ook de oplossing zelf kan discontinu worden.

Het verschil tussen de fysische behoudswet (1.4),

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_S F(\phi) \cdot n dS = 0 \quad (4.10)$$

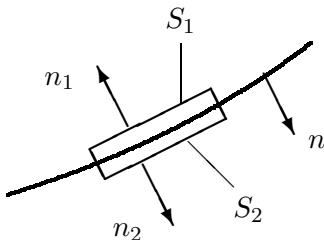
en de bijbehorende differentiaalvergelijking (1.3)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} F(\phi) = 0 \quad (4.11)$$

is nu belangrijk: in (1.4) \equiv (4.10) hoeft F niet differentieerbaar te zijn. Bovendien is dit de vorm met fysische betekenis. Dus laten we hier eens mee verder gaan.

Stationair

Begin met de stationaire versie van (4.10)



$$\int_S F(\phi) \cdot n dS = 0, \quad (4.12)$$

hetgeen voor elk gesloten oppervlak moet gelden. Laten we aannemen dat er een lijn (2-D) of oppervlak (3-D) is waarover de oplossing discontinu is. Sla hier een doosje omheen dat oneindig dun is. Dan gaat de behoudswet over in

$$\int_{S_1} F(\phi_1) \cdot n_1 \, dS_1 + \int_{S_2} F(\phi_2) \cdot n_2 \, dS_2 = 0.$$

De normalen zijn aan elkaar gerelateerd, waarmee we vinden

$$\int_{S_1} \{F(\phi_1) - F(\phi_2)\} \cdot n \, dS = 0.$$

Dit moet voor elk stukje lijn/oppervlak gelden; dus over zo'n discontinuïteit moet gelden

$$\{F(\phi_1) - F(\phi_2)\} \cdot n = 0,$$

hetgeen we vaak afkorten tot

$$[F] \cdot n = 0. \quad (4.13)$$

Hier is $[F] = F(\phi_2) - F(\phi_1)$ de sprong van F over de lijn/oppervlak. We noemen (4.13) de *sprongrelatie* behorend bij de behoudswet (4.12).

(flauw) Speciaal geval

Als we een *lineaire* vergelijking bekijken

$$(au)_x + (bu)_y = 0,$$

met coëfficiënten die continu zijn, dan leidt de sprongrelatie tot (de normaal is $n = (n_x, n_y)$)

$$[au] n_x + [bu] n_y = 0 \quad \Rightarrow \quad [u](an_x + bn_y) = 0.$$

Wederom zien we dat de discontinuïteit alleen over een karakteristiek kan plaatsvinden. Omdat alle informatie zich langs karakteristieken voortplant betekent dit dat we zelf bij de beginwaarde zo'n discontinuïteit er al ingestopt moeten hebben. NB $du/ds = 0$ geldt aan weerszijden van de karakteristiek.

De zaak wordt pas interessant als de vergelijking niet-lineair is. Dan kunnen discontinuïteiten 'spontaan' ontstaan (zie §4.4).

Instationair

De uitbreiding naar instationaire vergelijkingen is heel simpel. De tijd-richting kan toegevoegd worden aan de ruimte-richtingen:

$$\tilde{x} = (t, x);$$

de flux functie kan met een component worden uitgebreid

$$\tilde{F} = (\phi, F);$$

en merk op dat $\partial/\partial t$ net het eerste stuk is van de divergentie operator in het \tilde{x} -coördinaten-systeem. In dit nieuwe systeem is (4.11) te schrijven als

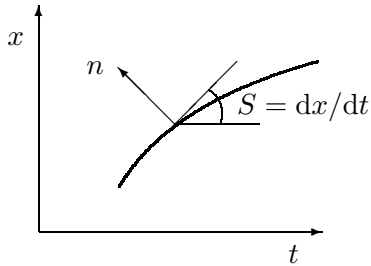
$$\operatorname{div}_{\tilde{x}} \tilde{F}(\phi) = 0,$$

en heeft dus als sprongrelatie

$$[\tilde{F}] \cdot n_{(\tilde{x})} = 0, \quad (4.14)$$

waarbij $n_{(\tilde{x})}$ de normaal is in het \tilde{x} -systeem.

Als speciaal geval werken we uit de situatie met één ruimte dimensie, met andere woorden de vergelijking (4.11) wordt



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(\phi) = 0. \quad (4.15)$$

Beschouw een discontinuïteitslijn in het (t, x) -vlak. De normaal n is uit te drukken in de helling dx/dt van deze lijn

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + (dx/dt)^2}} \begin{pmatrix} -dx/dt \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deze lijn drukt de verplaatsing uit in de tijd van het punt op de x -as waar de discontinuïteit in de oplossing plaats vindt. Met andere woorden dx/dt is de *schoksnelheid*. Noem deze S .

Werk nu de sprongrelatie (4.14) verder uit voor de vergelijking (4.15):

$$[\phi]n_t + [F]n_x = 0,$$

zodat invullen van de normaal oplevert

$$-S[\phi] + [F(\phi)] = 0. \quad (4.16)$$

Dit is de sprongrelatie voor een instationair probleem in één ruimte dimensie; deze relateert de schoksnelheid aan de grootte van de discontinuïteit.

4.4 De vergelijking van Burgers

Een eenvoudige vergelijking die niettemin veel facetten van stromingsverschijnselen bevat - convectorie, diffusie en schokvorming - is door Burgers geformuleerd (1948)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.17)$$

In deze paragraaf gaan we kijken naar de niet-viskeuze limiet van deze vergelijking; in behoudsvorm

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0. \quad (4.18)$$

De sprongrelatie voor zwakke oplossingen wordt

$$-S[u] + \left[\frac{1}{2} u^2 \right] = 0.$$

Laten u_1 en u_2 de snelheid voor en achter de schok zijn dan

$$-S(u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) = 0 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(u_1 + u_2). \quad (4.19)$$

De karakteristieke richtingen volgen uit $dx/dt = u$. Langs een karakteristiek geldt $u = \text{constant}$ (zie §2.2). We kunnen schrijven

$$\frac{du}{ds} = 0 \text{ langs krommen met } \frac{dx}{dt} = \text{constant}.$$

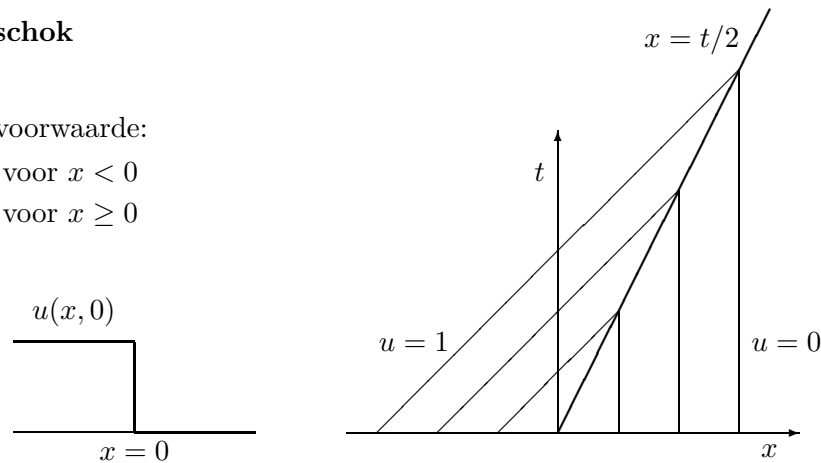
We gaan nu het Cauchy probleem bekijken voor een aantal beginwaarden. Achtereenvolgens behandelen we een lopende schok, een verdunningsgolf, een niet-fysische schok, en ‘spontane’ schokvorming.

Een lopende schok

Beginvoorwaarde:

$$u = 1 \text{ voor } x < 0$$

$$u = 0 \text{ voor } x \geq 0$$



Vanaf de positieve x -as vertrekken karakteristieken met $dx/dt = 0$; hierlangs geldt $u = 0$. Vanaf de negatieve x -as vertrekken karakteristieken met $dx/dt = 1$; hierlangs geldt $u = 1$.

Beide karakteristieken komen elkaar tegen; de oplossing dreigt meerwaardig te worden, wat nu? Er ontstaat een grenslijn die beide gebieden scheidt; langs deze lijn is de oplossing discontinu. De positie van de lijn wordt uit de sprongrelatie gehaald. In ons geval levert (4.19) dat voor deze lijn geldt

$$\frac{dx}{dt} = S = \frac{1}{2}.$$

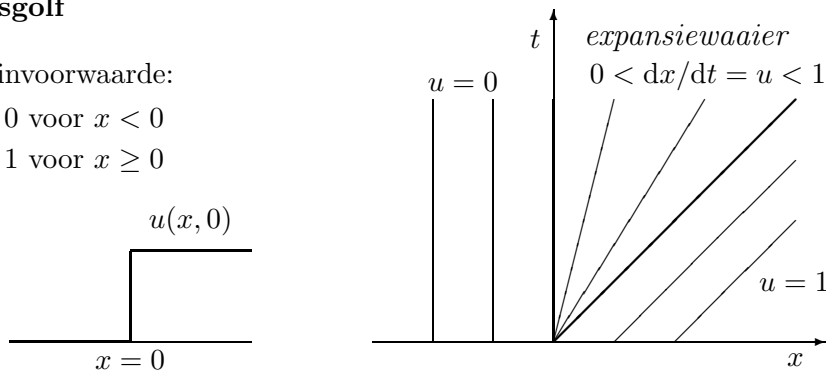
De schok verplaatst zich dus langs de lijn $x = \frac{1}{2}t$.

Verdunningsgolf

Beginvoorwaarde:

$$u = 0 \text{ voor } x < 0$$

$$u = 1 \text{ voor } x \geq 0$$

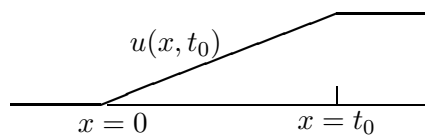


De karakteristieken vanaf de x -as laten nu een deel van het (x, t) -vlak vrij: het deel met $0 < x/t < 1$. In dit deel bestaat een oplossing van de vorm

$$u(x, t) = r\left(\frac{x}{t}\right).$$

Vul maar in: $\Rightarrow -\frac{x}{t^2}r' + r\frac{1}{t}r' = 0 \Rightarrow \frac{1}{t}r'(-\frac{x}{t} + r) = 0$. Dus $u = r = \frac{x}{t}$ voldoet.

In feite hebben we nu in $x = 0$ de beginfunctie meerwaardig gemaakt door hem over een willekeurig klein interval continu te laten oplopen van $u = 0$ naar $u = 1$. Bij elke waarde wordt dan de bijbehorende karakteristiek $dx/dt = u$ geconstrueerd. De waaier karakteristieken vanuit $x = 0$ heet *expansiewaaier*. Een doorsnede op $t = t_0$ ziet eruit als

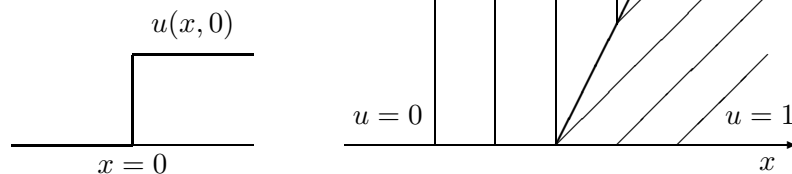


Niet-fysische schok

Beginvoorwaarde:

$$u = 0 \text{ voor } x < 0$$

$$u = 1 \text{ voor } x \geq 0$$



Bij de beginvoorwaarden van net is een andere oplossing te construeren. We nemen dezelfde discontinuïteitslijn als boven $dx/dt = \frac{1}{2}$. Deze scheidt weer toestanden met $u = 0$ en $u = 1$ van elkaar. Aan de sprongrelatie (4.19) is voldaan, en ook aan de differentiaalvergelijking. Echter deze oplossing blijkt geen fysische betekenis te hebben:

- Mathematisch is het raar dat karakteristieken nu in de schok ontspringen, want bij elke karakteristiek moet je een beginvoorwaarde geven.
- Deze oplossing kan niet optreden als limiet voor $\epsilon \rightarrow 0$ van oplossingen van het volledige probleem (4.17) - zie bijvoorbeeld Kreiss & Lorentz (Hfd. 4).

Om de goede 'schok' te selecteren wordt een extra voorwaarde geëist die in verschillende gedaantes kan optreden: *entropieconditie*. Bijvoorbeeld:

- entropie moet toenemen; of
- $u|_{\text{voor schok}} > u|_{\text{achter schok}}$ (de schoksnelheid komt tussen deze waarden in te liggen).

Bij numerieke oplosmethoden is dit uitfilteren van de goede schokoplossing ook een lastig punt.

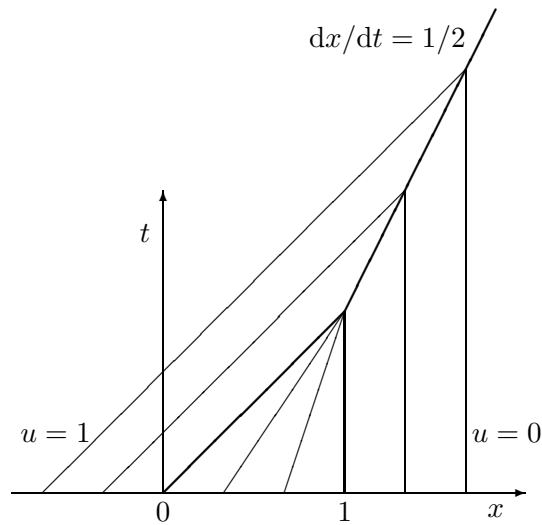
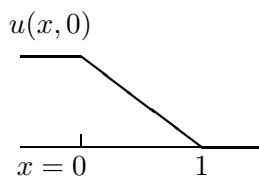
Schokvorming

Beginvoorwaarde:

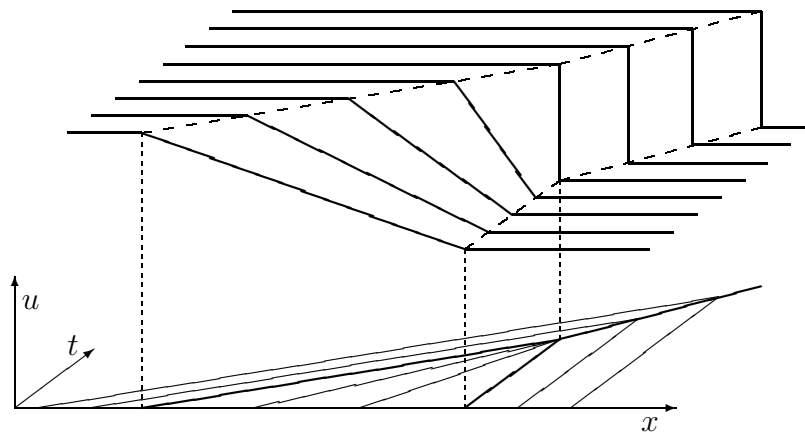
$$u = 1 \text{ voor } x \leq 0$$

$$u = 1 - x \text{ voor } 0 < x < 1$$

$$u = 0 \text{ voor } x \geq 1$$



De karakteristieken lopen weer naar elkaar toe. Degene die op $[0, 1]$ beginnen, snijden elkaar in $x = 1, t = 1$. [Ga na: in $(x_0, 0)$ is $u_0 = 1 - x_0$ en dit is de helling van de karakteristieken.] Met het voortschrijden van de tijd zie je het beginprofiel opstelen, tot het na $t = 1$ een echte schok vormt.



4.5 Stationaire isentrope Euler vergelijkingen (2-D)

Begin bij (3.11), neem de stationaire versie, en schrijf deze uit in 2-D

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial x} p &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y}p = 0.$$

Dit stelsel heeft de divergentie vorm

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial y}F_2 = 0,$$

$$\text{met } F_1 = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{pmatrix} \text{ en } F_2 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}.$$

De sprongrelaties worden

$$[F_1]n_x + [F_2]n_y = 0.$$

Let wel: dit zijn drie relaties omdat we drie vergelijkingen hebben.

Om de stromingsvergelijkingen te completeren hebben we nog nodig de thermodynamische toestandsvergelijking (3.10) welke voor isentrope stromingen het verband aangeeft tussen p en ρ .

Beschouw nu een kromme waarover een discontinuïteit optreedt. Neem aan dat deze kromme, tenminste lokaal, samenvalt met een stuk van de y -as. Door het coördinatensysteem te draaien is dit altijd voor elkaar te krijgen. In dit geval is dus $n_x = 1$ en $n_y = 0$, hetgeen de zaak veel overzichtelijker maakt. De sprongrelaties worden

$$\begin{cases} 1) & [\rho u] = 0 & \Rightarrow & \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ 2) & [\rho u^2 + p] = 0 & \Rightarrow & \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ 3) & [\rho uv] = 0 & \Rightarrow & \rho_1 u_1 v_1 = \rho_2 u_2 v_2 \end{cases} \quad (4.20)$$

Dit zijn de *Rankine-Hugoniot relaties*. Combinatie van de eerste en de derde relatie levert $\rho u[v] = 0$. Nu zijn er twee mogelijkheden:

- i) $u = 0$ ($\rho = 0$ is zinloos),
- ii) $[v] = 0$.

Contactdiscontinuïteit

In het eerste geval met $u = 0$ is de discontinuïteitslijn een stroomlijn. De tweede Rankine-Hugoniot relatie levert meteen dat $p_1 = p_2$, dus de druk is continu. De thermodynamische toestandsvergelijking levert dan ρ_1 en ρ_2 (isentrop $\Rightarrow \rho_1 = \rho_2$). De langssnelheid mag discontinu zijn. Dit type discontinuïteit heet *contactdiscontinuïteit*.

Schok

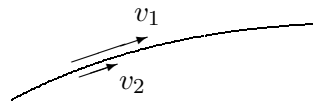
In het tweede geval is v continu, maar u mag discontinu zijn. Via de eerste Rankine-Hugoniot relatie volgt meteen de discontinuïteit in ρ , en de tweede relatie legt de druk aan weerszijden vast. Dit type heet *schok*. De oplossing achter de schok is te bepalen uit de oplossing voor de schok: de sprongrelaties (4.20) vormen samen met de thermodynamische p - ρ relatie vier vergelijkingen voor de vier onbekende toestandsgrootheden achter de schok.

contactdiscontinuïteit

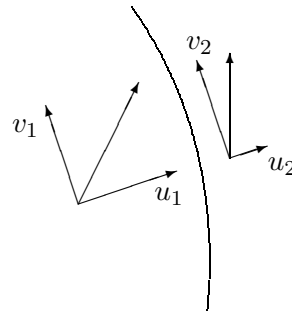
$$u_1 = u_2 = 0$$

$$v_1 \neq v_2$$

$$p_1 = p_2$$



schok

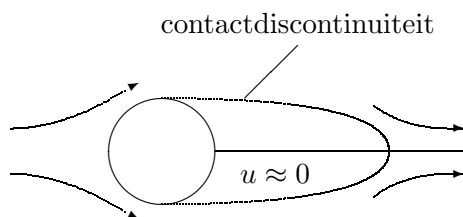


$$u_1 > u_2$$

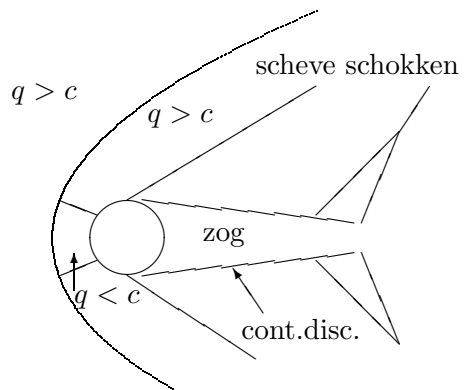
$$v_1 = v_2$$

$$\rho_1 < \rho_2$$

$$p_1 < p_2$$



De snelheid in het recirculerende gebied is zeer laag. Tussen dit gebied en de buitenstroming ligt een contactdiscontinuïteit. Wegens viskeuze effecten heeft deze enige dikte.



Bij een schok wijzigt de normaalsnelheid van $> c$ in $< c$ (zie college Stromingsleer). Maar samen met de tangentiële component kan de stroming na de schok nog supersoon zijn (de schok staat dan schief op de aanstroming). Op deze wijze kunnen er meerdere schokken na elkaar optreden.

4.6 File vorming bij verkeerslichten - vervolg

We zijn inmiddels in staat om onze beschrijving van de verkeersstroom bij verkeerslichten af te ronden. In Hoofdstuk 2 hebben we de bewegingsvergelijking (2.6) voor de doorstroming van verkeer afgeleid

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + Q'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (4.21)$$

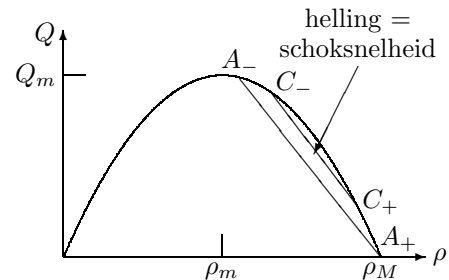
Het is een niet-lineaire vergelijking, waarvan de oplossing schokgolven kan bezitten. In ons voorbeeld werden we daar al mee geconfronteerd. De scheidingskromme tussen de karakteristieken van links en die van rechts is natuurlijk zo'n schokgolf. De helling dx/dt hiervan wordt gegeven door de schoksnelheid S , die we uit (4.16) kunnen bepalen.

$$S = \frac{Q(\rho_R) - Q(\rho_L)}{\rho_R - \rho_L},$$

waarin ρ_R en ρ_L de dichtheden aan rechter- c.q. linkerkzijde van de schok zijn. In ons voorbeeld is dus $\rho_L = \rho_i$. Hierdoor wordt het eerste deel van de schok AP een rechte lijn met helling $-Q(\rho_i)/(\rho_M - \rho_i)$. Deze helling geeft dus aan de snelheid waarmee de wachtende rij auto's langer wordt. Daarna ontstaat een expansiewaaier waarin ρ afneemt. Hierdoor neemt de helling van de schok toe. Deze zal blijven toenemen tot uiteindelijk aan weerszijden van de schok de dichtheid gelijk is geworden aan ρ_i , en de schoksnelheid gelijk aan $S = c(\rho_i)$.

Verstopt verkeerslicht

Wanneer de inkomende stroom een te hoge dichtheid heeft kan de schok niet meer door de groene periode heen. Bekijk zo'n geval van een evenwichtssituatie waarin $\rho_i > \rho_m$. Aan de figuur van $Q(\rho)$ zien we dat de schoksnelheid altijd negatief blijft, zodat er geen enkele mogelijkheid is dat de schok door het groene licht gaat. Er ontstaat nu een periodieke oplossing als in de figuur op de volgende pagina.



Vanuit het rode gedeelte komen karakteristieken waarop $V = 0$. Vanuit de overgang naar groen ontstaat weer een expansiewaaier, waarin de dichtheid ρ afneemt wanneer we met de klok meegaan. Op grond van dit verloop van de waarde van ρ in de waaier kunnen we de waarde van ρ langs een schok kwalitatief bepalen.

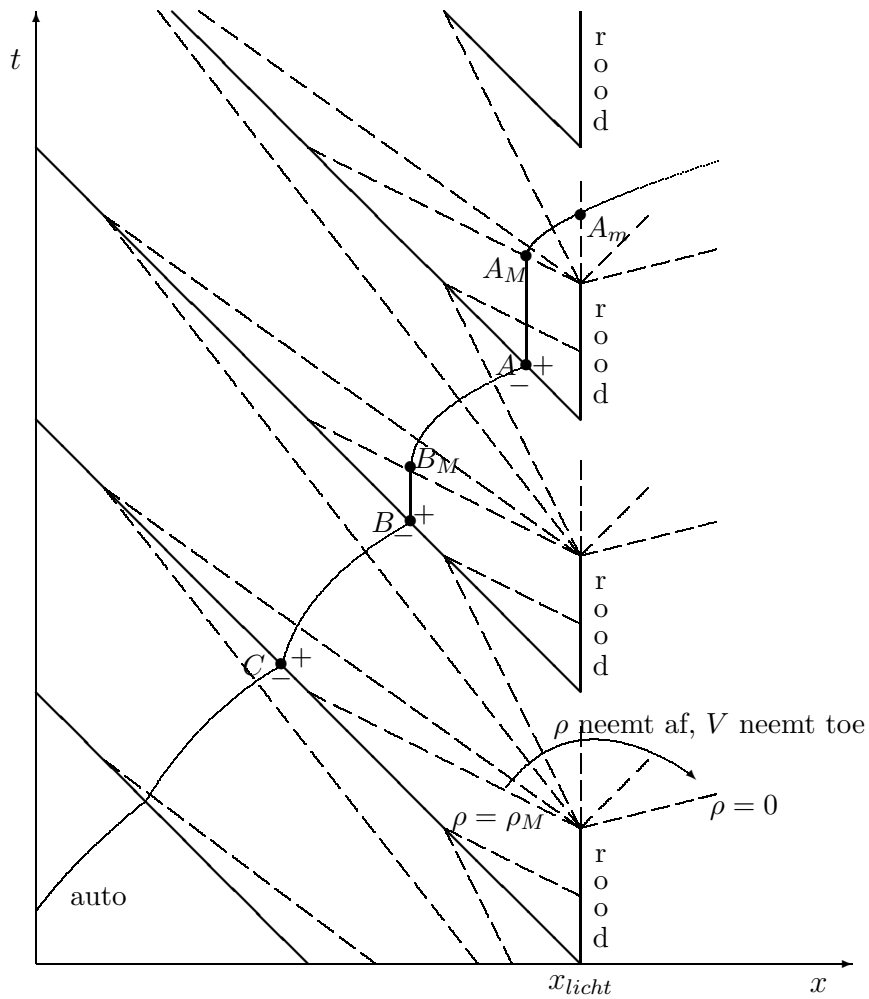
Bekijk een voertuigbaan zoals in de figuur aangegeven. Omdat A_- minder ver van het verkeerslicht af ligt dan B_- bevinden we ons hier verderop in de waaier, waardoor $\rho(A_-) < \rho(B_-)$. Analoog bevindt A_+ zich minder ver in de waaier dan B_+ zodat $\rho(A_+) > \rho(B_+)$. Aangezien verder de snelheid aan de $-$ kant hoger is dan aan de $+$ kant, volgt hieruit

$$\rho(A_+) \geq \rho(B_+) \geq \rho(C_+) \geq \dots \geq \rho(C_-) \geq \rho(B_-) \geq \rho(A_-).$$

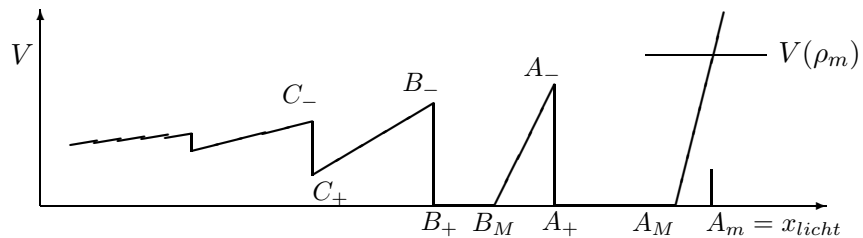
Dit betekent dat de schoksnelheid weinig zal variëren (voor het gemak is deze in de figuur maar constant getekend).

Wegens de monotone relatie tussen V en ρ betekent dit voor het verloop van de snelheid van een auto op weg naar het verkeerslicht

$$V(A_+) \leq V(B_+) \leq V(C_+) \leq \dots \leq V(C_-) \leq V(B_-) \leq V(A_-).$$



Het snelheidsverloop van een naderende auto wordt hierdoor steeds onregelmatiger; zie figuur. Vlakbij het verkeerslicht zien we de auto even stilstaan tussn B_+ en B_M . Daarna kan hij optrekken tot zijn snelheid $V(\rho_m)$ begint te naderen, maar haalt toch net niet het groene licht. Tussen A_+ en A_M moet de auto weer wachten, maar dan lukt het wel. Op A_m passeert hij het verkeerslicht met snelheid $V(\rho_m)$ en kan verder versnellen; als hij vooraan gestaan had zelfs tot een snelheid $V(0)$.



Snelheid van auto in aanloop naar verstopt verkeerslicht.

Hoofdstuk 5

GOED-GESTELDE BEGIN- EN RANDWAARDE PROBLEMEN

We gaan in dit hoofdstuk dieper in op de vraag wanneer een begin/randwaarde probleem goed gesteld is:

- i) de oplossing moet bestaan en eenduidig zijn;
- ii) de oplossing moet continu afhangen van de parameters in het probleem (coëfficiënten, beginwaarden, randwaarden).

We beginnen met een algemene stelling over existentie en eenduidigheid. Daarna wordt de afhankelijkheid van de probleem parameters bekeken. Dit doen we in eerste instantie voor lineaire beginwaarde problemen met constante coëfficiënten. Fourier analyse en resultaten uit de lineaire algebra vormen ons gereedschap. Vervolgens volgen enige opmerkingen over niet-lineaire vergelijkingen en variabele coëfficiënten. Tenslotte wordt aandacht besteed aan randwaarde problemen.

Alvast een nadere precisering van ii) (voor notatie zie Appendix A.3):

Stel u is de oplossing van het Cauchy probleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, u, \frac{\partial}{\partial x})u + F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.1)$$

met beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^s;$$

u zal in het algemeen een vector zijn met $u(x, t) \in \mathbb{C}^n$.

We beschouwen ook een naburig probleem waarin F en f vervangen zijn door $F + \delta F$ en $f + \delta f$:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = P(x, t, v, \frac{\partial}{\partial x})v + F + \delta F, \\ v(x, 0) = f + \delta f. \end{cases}$$

We willen nu graag dat ook het naburige probleem een oplossing heeft, en dat deze dichtbij de oorspronkelijke ligt

$$\|u - v\| \leq K\{\|\delta F\| + \|\delta f\|\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Wanneer de vergelijking lineair is voldoet het verschil $\delta u = v - u$ aan

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \delta u = P(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) \delta u + \delta F, \\ \delta u(x, 0) = \delta f. \end{cases}$$

De gewenste afchatting volgt dan als we voor het oorspronkelijke probleem (5.1) kunnen laten zien

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K\{\|F(\cdot, t)\| + \|f\|\}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.2)$$

5.1 De stelling van Cauchy-Kowalewsky

We formuleren in deze paragraaf een algemene stelling over existentie en eenduidigheid.

Stelling 5.1 (*Cauchy-Kowalewsky*) Beschouw de m^e orde PDV voor $u(x_1, \dots, x_s, t)$:

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = f\left(x_1, \dots, x_s, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_s^m}\right),$$

waarbij $\partial^m u / \partial t^m$ niet in f voorkomt. Langs $t = 0$ worden m beginvoorwaarden opgelegd:

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(0, x_1, \dots, x_s) = \varphi_i(x_1, \dots, x_s), \quad i = 0, \dots, m - 1.$$

Veronderstel

1. de functies φ_i ($i = 0, \dots, m - 1$) zijn analytisch in het punt $x_1 = \dots = x_s = 0$ (dat wil zeggen ze hebben een machtreeksontwikkeling);
2. f is analytisch in

$$\underbrace{(0, \dots, 0)}_{s \text{ maal}}, 0, \varphi_0(0, \dots, 0), \dots, \varphi_1, \dots, \frac{\partial^m \varphi_0}{\partial x_s^m}(0, \dots, 0)$$

Dan geldt dat er in een (voldoend kleine) omgeving van de oorsprong $x_1 = \dots = x_s = 0, t = 0$ precies één analytische oplossing bestaat van het bovenstaande Cauchy probleem.

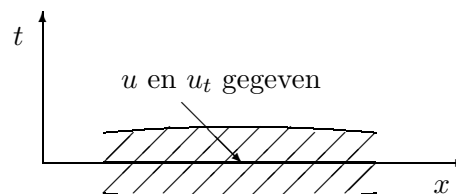
Zonder meer over het probleem te weten is er niet veel meer te bewijzen. We hebben in Hoofdstuk 4 al gezien dat, ondanks gladde beginwaarden, spontaan discontinuïteiten kunnen optreden zodat de oplossing dan niet meer analytisch is.

Voorbeeld $m = 2, s = 1$

$$u_{tt} = f(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{x,t})$$

met

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x).$$



Stel de beginvoorwaarden zijn analytisch in elk punt van x -as. Dan bestaat rond elk punt een kleine omgeving met existentie en eenduidigheid van de oplossing. Via de stelling van Heine-Borel volgt dat er een strip bestaat rond de x -as met existentie en eenduidigheid.

5.2 Het Fourier symbool

We gaan nu naar het Cauchy beginwaarde probleem kijken voor *lineaire* vergelijkingen met *constante* coëfficiënten, en analyseren dit met behulp van Fourier technieken. Als beginwaarde schrijven we

$$u(x, 0) = \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}.$$

We proberen een oplossing van de vorm

$$u(x, t) = \hat{u}(\omega, t)e^{i\omega x}, \quad (5.3)$$

en bestuderen het gedrag van de coëfficiënt $\hat{u}(\omega, t)$.

Voorbeelden

- $u_t + au_x = 0$ levert na substitutie van (5.3)

$$\hat{u}_t + i\omega a \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

met als oplossing

$$\hat{u} = e^{-i\omega at} \hat{f}(\omega),$$

zodat de oplossing voor u wordt

$$u(x, t) = e^{i\omega(x-at)} \hat{f}(\omega).$$

- $u_t = u_{xx}$ leidt tot

$$\hat{u}_t = -\omega^2 \hat{u}, \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega),$$

waarmee de oplossing wordt

$$u(x, t) = e^{i\omega x - \omega^2 t} \hat{f}(\omega).$$

- $u_t = -u_{xx}$ leidt tot de oplossing

$$u(x, t) = e^{i\omega x + \omega^2 t} \hat{f}(\omega).$$

Deze oplossing ontploft dus, en wel des te harder naarmate de frequentie ω groter is. In het vorige voorbeeld dempten alle frequenties.

Observatie We zien dat elke differentiatie naar x in de vergelijking voor \hat{u} een factor $i\omega$ in de coëfficiënt van \hat{u} oplevert. En dit werkt dan weer door in de coëfficiënt van t in de e -macht. We kunnen dit in een stelling formuleren.

Stelling 5.2 Beschouw het beginwaarde probleem

$$u_t = P(\partial/\partial x)u \quad (5.4)$$

(met P een polynoom) met als beginwaarde

$$u(x, 0) = \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}.$$

De oplossing wordt gegeven door

$$u(x, t) = \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} e^{P(i\omega)t}.$$

Bewijs Substitutie van (5.3) in (5.4) leidt tot

$$\hat{u}_t = P(i\omega)\hat{u}, \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

met als oplossing $\hat{u}(\omega, t) = e^{P(i\omega)t}\hat{f}(\omega)$. □

Definitie 5.3 $P(i\omega)$ heet het *Fourier symbol* van de differentiaal operator $P(\partial/\partial x)$.

Opmerking Bij het numeriek oplossen van PDV komen we de gediscretiseerde versie van het Fourier symbool weer tegen (zie o.a. het college Numerieke Stromingsleer).

5.3 Goed-gesteldheid

We hebben tot dusverre per Fourier component gekeken. Het idee is om bij algemene begincondities

$$u(x, 0) = f(x)$$

een Fourier ontbinding te plegen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega,$$

waarbij

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

Voor elke individuele term $e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)$ geldt bovenstaande evolutie, zodat de complete oplossing wordt

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) e^{P(i\omega)t} d\omega.$$

Dit loopt mis als $P(i\omega)$ uit de hand loopt voor $|\omega| \rightarrow \infty$.

Het ligt voor de hand om voor *elke* Fouriercomponent van de oplossing een net gedrag te verlangen à la $e^{\lambda t}$.

Definitie 5.4 Het Cauchy probleem (5.4) heet *goed gesteld* als er constanten α en K bestaan, onafhankelijk van ω , zo dat

$$|e^{P(i\omega)t}| \leq K e^{\alpha t} \tag{5.5}$$

voor alle $t \geq 0$.

Op grond hiervan is een energieafschatting te geven (waarbij we tweemaal de gelijkheid van Parseval gebruiken, welke zegt dat de L_2 -norm van een functie gelijk is aan de L_2 -norm van zijn Fourier getransformeerde)

$$\|u(\cdot, t)\| = \|e^{P(i\omega)t}\hat{f}(\omega)\| \leq K e^{\alpha t} \|\hat{f}\| = K e^{\alpha t} \|f\|. \tag{5.6}$$

We hebben daarmee een afschatting van het type (5.2).

Goed-gesteldheid laat toe dat een oplossing willekeurig groot kan worden voor $t \rightarrow \infty$; maar op elk begrensd tijdsinterval moet de oplossing begrensd zijn. Een zwaardere eis, namelijk dat de oplossing voor alle t begrensd blijft, wordt beschreven door de volgende definitie.

Definitie 5.5 Het Cauchy probleem (5.4) heet *stabiel* als er een constante K bestaat, onafhankelijk van ω , zo dat

$$|e^{P(i\omega)t}| \leq K \text{ voor alle } t \geq 0. \quad (5.7)$$

Wanneer geldt

$$|e^{P(i\omega)t}| \rightarrow 0 \text{ als } t \rightarrow \infty$$

noemen we het Cauchy probleem *sterk stabiel*.

De condities uit deze definities zijn in de praktijk te controleren via de eigenwaarden van $P(i\omega)$. Zie hiervoor Appendix A.2.

Voorbeelden

- *golfvergelijking*

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi_x$$

$$P(i\omega) = \begin{pmatrix} 0 & i\omega \\ i\omega & 0 \end{pmatrix} \text{ met eigenwaarden } \pm i\omega, \text{ dus } |e^{P(i\omega)t}| = 1$$

\Rightarrow goed gesteld; neutraal stabiel

- *potentiaalvergelijking*

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \varphi_x$$

$$P(i\omega) \text{ heeft eigenwaarden } \pm\omega, \text{ dus } |e^{P(i\omega)t}| \sim e^{\omega t}$$

\Rightarrow niet goed gesteld

- *warmtegeleidingsvergelijking*

$$\varphi_t = \alpha \varphi_{xx}$$

$$P(i\omega) = -\alpha \omega^2, \text{ dus } |e^{P(i\omega)t}| = e^{-\alpha\omega^2 t}$$

\Rightarrow goed gesteld en stabiel als $\alpha \geq 0$; niet goed gesteld als $\alpha < 0$.

Algemene stellingen

We formuleren nu twee algemene stellingen: een over hyperbolische vergelijkingen en een over parabolische vergelijkingen. We gebruiken resultaten uit Appendix A.

Stelling 5.6 Beschouw het eerste orde stelsel in 1D

$$u_t = Au_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad u \in \mathbb{C}^n, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (5.8)$$

Het Cauchy probleem voor (5.8) is goed gesteld d.e.s.d. als alle eigenwaarden van A reëel zijn en A een volledig stelsel eigenvectoren heeft, d.w.z. wanneer het stelsel *sterk hyperbolisch* is.

Bewijs \Leftarrow : Omdat A een volledig stelsel eigenvectoren heeft is te schrijven

$$A = S\Lambda S^{-1}, \text{ met } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Er geldt (o.a. via uitschrijven van de som in de definitie van de e-macht)

$$|e^{P(i\omega)t}| = |e^{i\omega At}| = |S e^{i\omega \Lambda t} S^{-1}| \leq |S| |S^{-1}|$$

omdat $|e^{i\omega \Lambda t}| = 1$ als Λ een reële diagonaalmatrix is. We kunnen dus $\alpha = 0$ nemen in de definitie (4.5).

\Rightarrow : Stel het probleem is goed gesteld, en laat $\lambda = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) eigenwaarde van A zijn. Dan is $i\omega\lambda = -\omega b + i\omega a$ een eigenwaarde van $P(i\omega)$.

Er geldt volgens (A.5) $|e^{P(i\omega)t}| \geq K_1 e^{-\omega b t}$ ($K_1 > 0$). Zolang $b \neq 0$ groeit dit te hard, dan wel voor $\omega \rightarrow +\infty$ dan wel voor $\omega \rightarrow -\infty$, om $\leq K e^{\alpha t}$ te zijn voor alle ω . Dus de eigenwaarden van A zijn reëel.

Neem vervolgens aan dat de matrix defect is, m.a.w. er is een eigenwaarde λ_r met Jordanblok van de orde k . Het Lemma A.7 is toepasbaar voor $e^{P(i\omega)t} = e^{(iA)(\omega t)}$. Let op de manier waarop hier de haakjes zijn geplaatst! iA heeft zuiver imaginaire eigenwaarden, dus $\mu = 0$ in dit lemma. Er is een $K_1 > 0$ (die alleen van A afhangt, en dus niet van ω) met

$$K_1(\omega t)^{k-1} \leq |e^{(iA)(\omega t)}| = |e^{P(i\omega)t}|$$

en het linkerlid groeit te hard als functie van ω (op een eindig interval $[0, T]$ is er geen constante K_T aan te geven waarmee het linkerlid kan worden gemajoreerd voor alle ω). Hiermee is het bewijs compleet. \square

Opmerking Sommige auteurs vinden de algebraïsche groei niet dramatisch, en noemen deze situatie *zwak goed gesteld*, met als algemene definitie

$$|e^{P(i\omega)t}| \leq K(1 + |\omega|^q)e^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Stelling 5.7 Beschouw het *parabolische* stelsel

$$u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (5.9)$$

waarbij we aannemen dat A reëel en symmetrisch is. Het Cauchy probleem voor (5.9) is goed gesteld als voor alle eigenwaarden van A geldt $\text{Re } \lambda > 0$.

Bewijs Het Fourier symbool van (5.9) is

$$P(i\omega) = -\omega^2 A + i\omega B + C.$$

Herschrijven we Definitie 5.4, dan is het voldoende om te bewijzen dat er een α en een K bestaan, onafhankelijk van ω , zodat

$$|e^{(P(i\omega) - \alpha I)t}| \leq K.$$

Kort af $M = P(i\omega) - \alpha I$, en beschouw de eigenwaarden μ van $M + M^*$ met bijbehorende genormeerde eigenvector x . Dan geldt

$$\mu \langle x, x \rangle = \langle (M + M^*)x, x \rangle = -2\omega^2 \langle Ax, x \rangle + \langle (i\omega B + C - i\omega B^* + C^*)x, x \rangle - 2\alpha \langle x, x \rangle.$$

Omdat A symmetrisch is bezit A een volledig stelsel eigenvectoren. Er geldt verder $\langle Ay, y \rangle \geq \lambda_{\min} \langle y, y \rangle \forall y$. Uit de voorwaarde in de stelling weten we dat $\lambda_{\min} > 0$. We kunnen nu gaan afschatten

$$\mu \leq -2\omega^2 \lambda_{\min} + C_1 \omega + C_2 - 2\alpha.$$

Door α groot genoeg te kiezen blijft het rechterlid negatief voor alle ω . Volgens Stelling A.9 volgt nu $|e^{Mt}| \leq 1$. Hiermee is de stelling bewezen. \square

Opmerking 1 We zien aan deze stelling dat het lagere orde deel geen rol van betekenis speelt bij parabolische tweede orde vergelijkingen.

Opmerking 2 Ook als A niet symmetrisch is geldt de stelling. Het bewijs wordt wat lastiger - we hebben de Lyapunov matrix nodig (zie Appendix A).

Opmerking 3 In de theorie van PDV's speelt Fourieranalyse een essentiële rol. Wij volstaan hier met een vrij globale behandeling. Een meer fundamentele aanpak wordt behandeld in het college Lineaire PDV.

5.4 Inhomogene lineaire vergelijkingen.

De resultaten uit de vorige paragraaf zijn afgeleid voor *homogene* PDV's. In de praktijk komen deze zeer veel voor. Af en toe kom je vergelijkingen tegen met een *inhomogene* term (wordt vaak 'bronterm' genoemd)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u + F(x, t). \quad (5.10)$$

We willen nu even kijken naar de invloed van de inhomogene term $F(x, t)$ op de goed-gesteldheid van het probleem.

Principe van Duhamel

Beschouw het beginwaarde probleem voor $v(x, t; \tau)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, \frac{\partial}{\partial x})v, & \tau \leq t, \\ v(x, \tau; \tau) = F(x, \tau). \end{cases} \quad (5.11)$$

Dan is de oplossing van het inhomogene probleem (5.10) met beginwaarden $u(x, 0) = 0$ te schrijven als

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau. \quad (5.12)$$

‘Bewijs’ Differentiëren van (5.12) levert

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v(x, t; t) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau \\ &= F(x, t) + \int_0^t P v(x, t; \tau) d\tau \quad (P \text{ hangt niet van } \tau \text{ af}) \\ &= F(x, t) + P \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau \\ &= F(x, t) + P u. \end{aligned}$$

Dus de uitdrukking (5.12) voldoet aan (5.10). \square

Wanneer we wel een inhomogene beginwaarde $u(x, 0) = f(x)$ wensen, splitsen we de oplossing in $u = u_1 + u_2$, met u_1 oplossing van de homogene vergelijking met inhomogene beginwaarde, en u_2 oplossing van de inhomogene vergelijking met homogene beginwaarde.

Toepassing

Beschouw nu het Cauchy probleem met constante coëfficiënten

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u + F(x, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (5.13)$$

De oplossing van het hiermee corresponderende probleem (5.11) luidt

$$\begin{aligned} v(x, t; \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} e^{P(i\omega)(t-\tau)} \hat{F}(\omega, \tau) d\omega \\ &\equiv S(t-\tau)F(x, \tau). \end{aligned}$$

Met deze formele definitie van S is de oplossing u_1 van de homogene variant van (5.13) te schrijven als

$$u_1 = S(t)f.$$

Superpositie en Duhamel leveren nu als oplossing van het inhomogene probleem met inhomogene beginvoorwaarden

$$u(x, t) = S(t)f + \int_0^t S(t-\tau)F(x, \tau)d\tau.$$

Als het homogene probleem goed-gesteld is weten we dat

$$\|S(t)f\| \leq Ke^{\alpha t}\|f\|,$$

en daarmee volgt voor het inhomogene probleem

$$\|u(\cdot, t)\| \leq Ke^{\alpha t}\|f\| + \int_0^t Ke^{\alpha(t-\tau)}\|F(\cdot, \tau)\| d\tau.$$

We hebben nu een afschatting van het type

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K_T\{\|f\| + \int_0^t \|F\| d\tau\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dit soort afschatting willen we graag hebben.

Opmerking Voor de rechtvaardiging van gepleegde overgangen wordt verwezen naar meer fundamentele colleges.

5.5 Niet-lineaire vergelijkingen

Al onze resultaten tot dusver zijn afgeleid via Fourier analyse. Om deze te kunnen toepassen is het noodzakelijk dat de vergelijkingen lineair zijn en constante coëfficiënten hebben. Hier is in de praktijk vaak niet aan voldaan.

Voor niet-lineaire vergelijkingen of vergelijkingen met variabele coëfficiënten wordt het beschikbare analyse gereedschap veel minder krachtig. De hoop bestaat dan ook om via ‘nabij gelegen’ lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten uitspraken te kunnen doen. Twee stappen zijn hierbij nodig:

1. linearisatie;
2. lokalisatie.

Laat het te bestuderen probleem gegeven zijn door

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, u, \frac{\partial}{\partial x})u + F(x, t), & 0 \leq t, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (5.14)$$

met P afhankelijk van x , t en u .

Linearisatie

De eerste stap is om de PDV (5.14) te relateren aan een lineaire vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{P}(x, t, U, \frac{\partial}{\partial x})u + F(x, t), \quad (5.15)$$

waarbij U gegeven is. We illustreren dit proces met een voorbeeld. Beschouw

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Laat U een redelijke benadering zijn van de gewenste oplossing. Schrijf

$$u = U + u',$$

met u' klein. Vul in

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial t}.$$

We verwaarlozen nu de tweede orde term in u' , en houden over (met v in plaats van u')

$$\frac{\partial v}{\partial t} = U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} v + U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Dit proces heet linearisatie rond U .

Deze vergelijking heeft qua karakter veel te maken met de oorspronkelijke vergelijking. Ruwweg geldt het *linearisatie principe*:

“Een niet-linear probleem is goed gesteld in u als de lineaire problemen ontstaan na linearisatie rond alle functies in de buurt van u goed gesteld zijn.”

Lokalisatie

Na linearisatie blijft een probleem over met variabele coëfficiënten. De inhomogene term kan via Duhamel behandeld worden; daarna resteert het homogene probleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u. \quad (5.16)$$

We zouden dit probleem graag relateren aan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x_0, t_0, \frac{\partial}{\partial x})u, \quad (5.17)$$

dat wil zeggen we bevriezen de coëfficiënten in willekeurige punten (x_0, t_0) : met andere woorden we kijken *lokaal* naar de vergelijkingen.

Graag zouden we het volgende verband zien tussen het constante coëfficiënten probleem (5.17) en het variabele coëfficiënten probleem (5.16) - *lokalisatie principe*:

“Als voor alle (x_0, t_0) het probleem (5.17) goed gesteld is dan is het variabele probleem (5.16) ook goed gesteld.”

Helaas! Dit geldt niet in zijn algemeenheid: het gezochte verband is noch noodzakelijk noch voldoende. Gelukkig is er een klasse van vergelijkingen waar het lokalisatie principe wel opgaat. Hier vallen sterk hyperbolische en parabolische vergelijkingen onder en hun mengvormen. Dus voor de Euler, Navier-Stokes, ondiep-water vergelijkingen, etc. uit de stromingsleer geldt het principe wel. Voor de Schrödinger vergelijking uit de quantummechanica geldt het lokalisatie principe niet; zie Opgave 19 (Appendix B). Meer achtergrond hierover staat in Kreiss & Lorenz.

5.6 Goed-gestelde randwaarde problemen

Vervolgens willen we kijken naar de invloed van randvoorwaarden op goed gesteldheid. Beschouw het volgende begin/randwaardeprobleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Pu + F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

met beginvoorwaarde

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (5.18)$$

en randvoorwaarden

$$Lu = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

Hier is P een lineaire differentiaaloperator als vroeger (mag van x en t afhangen). Verder is L een lineaire operator die waarden van u en zijn afgeleiden combineert (mag ook afgeleiden naar t bevatten).

Goed-gesteldheid is een begrip dat vanuit een fysisch gevoel wordt gedefiniëerd. De precieze wiskundige formulering biedt daarmee wat ruimte; we mogen die formulering uitzoeken die goed aansluit bij het technische gereedschap (= wiskundige bewijsmogelijkheden). Kreiss & Lorenz hanteren onder andere de volgende definitie:

Definitie 5.8 Het begin/randwaarde probleem (5.18) heet *sterk goed gesteld* als er voor alle gladde data F , f en g een eenduidige gladde oplossing u bestaat, en er voor elk tijdsinterval $0 \leq t \leq T$ een constante K_T bestaat (onafhankelijk van F , f of g) zodat

$$\|u(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{\partial\Omega}^2 d\tau \leq K_T \{ \|f\|^2 + \int_0^t \|F(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|g(\cdot, \tau)\|_{\partial\Omega}^2 d\tau \}. \quad (5.19)$$

Dit type afchatting houden we als doel voor ogen. Net als in §5.3, toen we als tussenstap naar Fourieranalyse keken en goed-gesteldheid in termen van Fourier componenten definiëerden, kunnen we naar elementaire oplossingen kijken. Hiervoor gaan we Fourier en Laplace transformaties gebruiken. In §5.7, over hyperbolische vergelijkingen, behandelen we alleen deze transformatie techniek; via Parseval-achtige relaties, zie (5.11), is daaruit dan wel weer iets à la (5.19) af te leiden. In Hoofdstuk 6, over parabolische vergelijkingen, behandelen we de techniek om energie afchattingen te geven waarmee we rechtstreeks op (5.19) uitkomen.

1-D hyperbolische problemen

We gaan nu algemener op zoek naar geschikte randvoorwaarden voor hyperbolische vergelijkingen, en generaliseren nu de beschouwingen in §4.2. Beschouw het lineaire stelsel

$$u_t = A(x, t)u_x + F(x, t), \quad u \in \mathbb{C}^n \quad (5.20)$$

in de strip $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ met beginwaarden

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

In de randpunten $x = 0$ en $x = 1$ schrijven we lineaire relaties voor u voor, dat wil zeggen we kijken naar randvoorwaarden van het type

$$L_0 u(0, t) = g_0(t), \quad L_1 u(1, t) = g_1(t), \quad t > 0. \quad (5.21)$$

We nemen verder aan dat het stelsel sterk hyperbolisch is, d.w.z. voor alle x en t heeft A uitsluitend reële eigenwaarden met bijbehorende eigenvectoren.

Zoals we in §3.2 gezien hebben is het stelsel nu diagonaliseerbaar tot

$$\varphi_t + \Lambda(x, t)\varphi_x = \tilde{b}(x, t, \varphi), \quad (5.22)$$

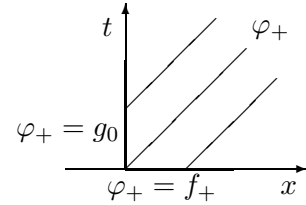
waarin Λ de eigenwaarden λ_j van A bevat, en \tilde{b} het getransformeerde rechterlid is. De eigenwaarden bepalen de helling van de basiskarakteristieken volgens

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_j(x, t).$$

Kijkend naar hun richting kunnen we drie soorten karakteristieken onderscheiden: naar rechts lopend, vertikaal, naar links lopend; corresponderend met $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ en $\lambda < 0$, respectievelijk. De bijbehorende karakteristieke variabelen noemen we φ_+ , φ_0 en φ_- . Deze variabelen moeten worden vastgelegd op het moment dat de karakteristiek het gebied Ω binnenkomt. Het ligt dus voor de hand om φ_+ op de linker rand en φ_- op de rechter rand voor te schrijven.

Voor φ_0 geldt dat deze vastligt als zijn beginvoorwaarde bekend is. Als $\lambda_j = 0$ optreedt dan noemen we de randen van het gebied karakteristieke randen. We mogen op zo'n rand dus niet φ_0 voorschrijven.

Bij hoeken moeten we uitkijken. In de figuur wordt φ_+ bepaald òf uit de beginvoorwaarde (f_+) òf uit de randvoorwaarde (g_0). Als deze niet glad op elkaar aansluiten heeft dit gevolgen voor de gladheid in het inwendige. Met andere woorden een gladde oplossing vereist compatibiliteit tussen begin- en randvoorwaarden.



§4.2 generaliserend, mogen we op de rand natuurlijk ook de ingaande variabelen als functie van de (bekende) uitgaande variabelen voorschrijven. We komen dan uit op het volgende type randvoorwaarden

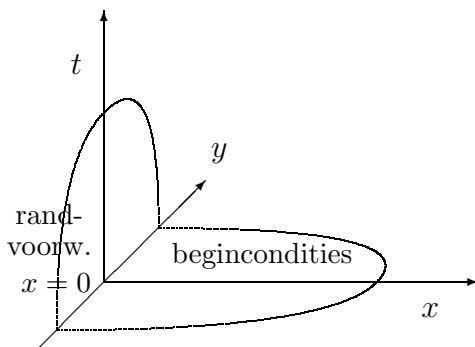
$$\begin{aligned} \text{links: } \quad \varphi_+(0, t) &= S_0(t)\varphi_-(0, t) + g_0(t), \\ \text{rechts: } \quad \varphi_-(1, t) &= S_1(t)\varphi_+(1, t) + g_1(t). \end{aligned} \tag{5.23}$$

S_0 en S_1 zijn matrices. Stel er zijn n_+ eigenwaarden met $\lambda > 0$, n_- eigenwaarden met $\lambda < 0$ en n_0 eigenwaarden met $\lambda = 0$. Dan is φ_+ een vector ter lengte n_+ , φ_- een vector ter lengte n_- , S_0 een $n_+ \times n_-$ matrix en S_1 een $n_- \times n_+$ matrix.

Omdat (5.22) een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen is voor de karakteristieke variabelen, is de existentie en eenduidigheid van de oplossing duidelijk. Goed gesteldheid eist iets meer, n.l. afschattingen van het type (5.19). We zullen in de volgende paragraaf zien dat dit beperkingen oplegt aan S_0 en S_1 : ze mogen niet te groot zijn.

5.7 Analyse van begin/randwaarde problemen in meer dimensies: een voorbeeld

In deze paragraaf gaan we aan de hand van een voorbeeld vergelijking in meer dimensies de Laplace analyse demonstreren. We zullen onder andere zien dat het voor de eisen aan S_0 en S_1 verschil uitmaakt of we in één dimensie dan wel in meer dimensies werken. Het voorbeeld komt uit Kreiss & Lorenz (Hfd. 8.4); daar is ook de generalisatie naar het algemene geval te vinden.



In dit voorbeeld gaan we het strip probleem vervangen door een half-ruimte probleem, dat wil zeggen we hebben maar één zijrand. Er valt aan te tonen dat een eventuele andere (tegenoverliggende) zijrand geen essentiële invloed kan uitoefenen op problemen veroorzaakt bij de nu te bestuderen rand. De *eindige* voortplantingssnelheid bij hyperbolische problemen speelt hierbij een belangrijke rol (d.w.z. signalen vanaf de overkant hebben lange tijd nodig om op de andere rand aan te komen).

De Laplace analyse die we nu zullen plegen is ook bruikbaar voor het analyseren van de invloed van randvoorwaarden op *discrete* stelsels vergelijkingen (zoals bij het *numeriek* oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen).

Het voorbeeld dat we beschouwen is lineair en heeft constante coëfficiënten. Voor variabele coëfficiënten is ook theorie te geven; die is zeer lastig maar komt er uiteindelijk op neer dat het lokalisatieprincipe geldt (zie §5.5).

Het modelprobleem

We beschouwen het volgende hyperbolische stelsel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = (u_1, u_2) \quad (5.24a)$$

in de halfruimte

$$0 \leq x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad t \geq 0.$$

Op $x = 0$ schrijven we een randvoorwaarde voor

$$u_1(0, y, t) = au_2(0, y, t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (5.24b)$$

Merk op dat op $x = 0$ de ingaande variabele u_1 is en u_2 de uitgaande.

Basisoplossingen

We proberen oplossingen die zich als functie van t gedragen als e^{st} , dat wil zeggen we voeren in feite een Laplace transformatie uit naar t . In y -richting doen we de vertrouwde Fourier transformatie

$$u(x, y, t) = e^{\alpha(st+i\omega y)} \phi(\alpha x), \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

met $\alpha > 0$, $s \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Invullen levert een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen in x

$$s\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi' + i\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (5.26a)$$

met randvoorwaarde

$$\phi_1(0) = a\phi_2(0). \quad (5.26b)$$

Verder zoeken we naar oplossingen die voor $x \rightarrow +\infty$ uitsterven, dat wil zeggen we eisen tevens

$$\int_0^\infty |\phi^2| dx < \infty. \quad (5.26c)$$

Merk op dat (5.25) een vrije parameter α bevat, die in (5.26a) verdwenen is. Dit betekent dat als we één oplossing van (5.26a) hebben, dan mag in (5.25) α willekeurig gekozen worden, en levert dat nog steeds een oplossing.

Analyse

Beschouw nu een vaste Fourier component $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Dan is (5.26a-5.26c) een eigenwaarde probleem geworden met als parameter s . Voor de meeste s zal alleen $\phi \equiv 0$ voldoen, maar voor sommige $s \equiv s_0$ bestaat er een niet-triviale oplossing voor ϕ . Zo'n waarde s_0 heet eigenwaarde behorende bij ω_0 .

Stelling 5.9 Als er een $\omega_0 \in \mathbb{R}$ bestaat waarbij een eigenwaarde $s_0 \in \mathbb{C}$ hoort met $\operatorname{Re} s_0 > 0$, dan is het begin/randwaarde probleem (5.24a-5.24b) slecht gesteld.

Bewijs Als $\operatorname{Re} s > 0$ dan groeit (5.25) in de tijd. Als (5.25) een oplossing is, dan kunnen we α willekeurig groot kiezen, en we hebben nog steeds een oplossing. Met andere woorden de oplossing, voor deze specifieke Fourier-component ω_0 , kan willekeurig hard groeien. \square

Deze stelling levert een noodzakelijke (en voldoende) voorwaarde opdat het probleem goed gesteld is: er mogen geen eigenwaarden s_0 bestaan met $\operatorname{Re} s_0 > 0$. Dit legt uiteindelijk eisen op aan de coëfficiënten van de vergelijking; in ons geval (5.24b) aan de parameter a .

Stelling 5.10 De volgende condities zijn equivalent:

1) de coëfficiënt a in (5.24b) voldoet aan

$$a \in \mathbb{R} \text{ of } |a| \leq 1; \quad (5.27)$$

2) Voor alle $\omega \in \mathbb{R}$, voldoen alle eigenwaarden s van (5.26a-5.26c) aan $\operatorname{Re} s \leq 0$, d.w.z. het probleem (5.24a-5.24b) is goed gesteld.

Bewijs (5.26a) kan herschreven tot (neem $\alpha = 1$)

$$\phi_x = \begin{pmatrix} -s & i\omega \\ -i\omega & s \end{pmatrix} \phi, \quad 0 \leq x < \infty.$$

De coëfficiënten matrix heeft als eigenwaarden $k_{1,2} = \pm\sqrt{s^2 + \omega^2}$, en als fundamentele oplossing $e^{k_1 x}$ en $e^{k_2 x}$.

Als $\operatorname{Re} s > 0$ is $k_2 = -\sqrt{s^2 + \omega^2}$ degene met $\operatorname{Re} k_2 < 0$. De andere eigenwaarde heeft $\operatorname{Re} k_1 > 0$ en groeit dus te hard in x -richting.

De eigenvector bij k_2 is $\begin{pmatrix} s + \sqrt{s^2 + \omega^2} \\ i\omega \end{pmatrix}$ zodat de algemene oplossing die aan (5.26c) voldoet wordt

$$\phi(x) = \sigma e^{-x\sqrt{s^2 + \omega^2}} \begin{pmatrix} s + \sqrt{s^2 + \omega^2} \\ i\omega \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{C}.$$

Tenslotte moeten we σ nog zo kiezen dat de oplossing voldoet aan de randvoorwaarde op $x = 0$ (5.26b)

$$\sigma(s + \sqrt{s^2 + \omega^2}) = \sigma ai\omega.$$

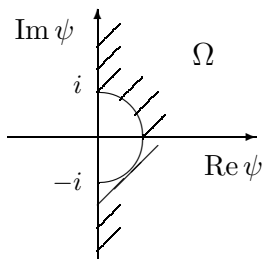
Dus s (met $\operatorname{Re} s > 0$) is een eigenwaarde behorend bij ω d.e.s.d. als

$$s + \sqrt{s^2 + \omega^2} = ai\omega. \quad (5.28)$$

Als $\omega = 0$ is het duidelijk dat er geen eigenwaarde s met $\operatorname{Re} s > 0$ bestaat. Neem daarom $\omega \neq 0$, en herschrijf (5.28) als

$$\psi(z) \equiv z + \sqrt{z^2 + 1} = ai \frac{\omega}{|\omega|}, \quad z = \frac{s}{|\omega|}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

De functie $\psi(z)$ beeldt het gebied $\operatorname{Re} z > 0$ af op het gebied



$$\Omega = \{\psi \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \psi > 0 \text{ en } |\psi| > 1\}.$$

Dus de vergelijking

$$\psi(z) = ai \frac{\omega}{|\omega|}$$

heeft *geen* oplossing met $\operatorname{Re} z > 0$ d.e.s.d. als $\pm ai \notin \Omega$, i.e. als $a \in \mathbb{R}$ of $|a| \leq 1$. Hiermee is de stelling bewezen. \square

Opmerking 1 Onderweg zijn we het één-dimensionale geval tegengekomen, namelijk $\omega = 0$. Dit zijn Fourier-componenten constant in y -richting en voldoen dus aan de 1-D vergelijking. We zagen dat voor $\omega = 0$ er geen verkeerde eigenwaarden s waren. Dit geldt algemeen in 1-D; daar hoeven aan randvoorwaarden als (5.23) geen verdere restricties aangaande S_0 en S_1 opgelegd te worden.

Opmerking 2 Op de rand van Ω vinden we eigenwaarden met $\operatorname{Re} s = 0$. Deze groeien niet, maar dempen ook niet; ze zijn dus net op het randje. Willen we dempende oplossingen dan zal $|a| < 1$ moeten zijn.

Opmerking 3 In geval er meerdere randvoorwaarden aan één kant zijn, generaliseert (5.28) tot een determinant conditie $|\det(s)| = 0$.

Hoofdstuk 6

PARABOLISCHE BEGIN- EN RANDWAARDE PROBLEMEN

We hebben in §5.3 al gezien dat parabolische vergelijkingen als

$$u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu \quad (6.1)$$

goed gesteld zijn zodra alle eigenwaarden λ van A voldoen aan $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Bovendien worden de hoge Fourier componenten sterk gedempt. Dit vergemakkelijkt de behandeling van parabolische vergelijkingen ten opzichte van die van hyperbolische vergelijkingen. Het maakt oplossingen gladder en er bestaat een maximumprincipe.

Aan de andere kant is een parabolisch probleem moeilijker dan een hyperbolisch probleem omdat de voortplantingssnelheid van verstoringen oneindig groot is. Numerici krijgen dit op hun brood in de vorm van veel stringenter eisen aan de toelaatbare tijdstap $\Delta t < \operatorname{Const}(\Delta x)^2$ in plaats van $\Delta t < \operatorname{Const}\Delta x$ (zie college Eindige Differentiemethoden).

We demonstreren bovenstaande allereerst aan de hand van een voorbeeldvergelijking.

6.1 De warmtegeleidingsvergelijking

We zullen kenmerkende eigenschappen van parabolische vergelijkingen illustreren met een 1-D warmtegeleidingsvergelijking

$$u_t = u_{xx}, \quad (6.2)$$

op te lossen in een strip $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t < \infty$, met bijbehorende begin- en randvoorwaarden.

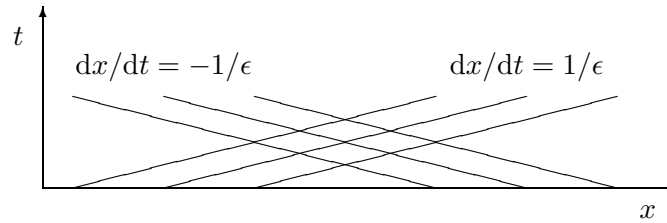
Deze vergelijking kunnen we beschouwen als limietgeval van de hyperbolische vergelijking.

$$\epsilon^2 u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 \quad (\epsilon > 0), \quad (6.3)$$

waarin we $\epsilon \rightarrow 0$ laten gaan.

(6.3) is een hyperbolische PDV met karakteristieke richtingen $dx/dt = \pm 1/\epsilon$. Eén stel karakteristieken loopt naar rechts, één stel loopt naar links. Als randwaarde wordt dan ook één voorwaarde links en één voorwaarde rechts verwacht. De karakteristieke variabelen zijn $\epsilon u_t - u_x$ en $\epsilon u_t + u_x$.

Wanneer, als voorbeeld, de beginwaarden $u(x, 0) = \text{geg.}$ en $u_t(x, 0) = \text{geg.}$ worden gehanteerd, dan is het Cauchy probleem voor (6.3) goed gesteld.



Laat nu $\epsilon \rightarrow 0$. Dan naderen beide karakteristieken tot de x -as; dat wil zeggen ze vallen samen en de lijn waarop de beginwaarde is gegeven wordt een karakteristiek. Dus oppassen! Inderdaad moeten we een van de beginwaarden, zeg $u_t = \text{geg.}$, laten vallen omdat deze nu uit de PDV en de beginwaarde $u = \text{geg.}$ gereconstrueerd kan worden (compatibiliteit). Cauchy-Kowalewsky (§5.1) zegt dat één beginwaarde $u = \text{geg.}$ voldoende is voor (lokale) existentie en eenduidigheid van het Cauchy probleem.

Op grond van deze overwegingen komen we tot de volgende begin/randvoorwaarden voor de parabolische vergelijking (6.2).

Op $t = 0$ wordt een beginvoorwaarde gegeven

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

en op $x = 0$ en op $x = 1$ randvoorwaarden

$$\begin{cases} L_{0D}u(0, t) + L_{0N}u_x(0, t) = 0 \\ L_{1D}u(1, t) + L_{1N}u_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

van het gemengde Dirichlet/Neumann type.

Maximum principe

Het parabolisch begin/randwaarde probleem op $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \text{geg.}, \quad u(0, t) = \text{geg.}, \quad u(1, t) = \text{geg.} \quad (6.4)$$

bezit een maximum principe.

Stelling 6.1 De oplossing van (6.4) kan alleen een globaal maximum (minimum) aannemen op de begin- en/of randkromme.

Bewijs Stel in het inwendige $0 < x < 1$, $0 < t \leq T$ wordt een maximum aangenomen in (x_0, t_0) met waarde M . Neem aan dat op de rand $t = 0 \vee x = 0 \vee x = 1$ de grootste waarde $M - \epsilon$ is.

In het maximum geldt $u_{xx} \leq 0$ en $u_t = 0$ dan wel $u_t \geq 0$ (het laatste op $t = T$). Invullen in de vergelijking levert nog net geen tegenspraak. Bekijk nu de hulpfunctie

$$w(x, t) = u(x, t) + \frac{1}{2}\epsilon x^2.$$

In (x_0, t_0) geldt $w(x, t) \geq M$. Op de rand geldt $w(x, t) \leq M - \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = M - \frac{1}{2}\epsilon < M$. Dus deze functie heeft ook een maximum in het inwendige. In dit punt geldt

$$w_{xx} \leq 0 \text{ en } w_t \geq 0.$$

Maar $w_t - w_{xx} = u_t - u_{xx} - \epsilon = -\epsilon < 0$, en dit is in tegenspraak met de regel hierboven.

Door u te vervangen door $-u$ volgt de analoge bewering voor minima. \square

Opmerking Lokale maxima waarin $u_{xx} < 0$ zijn niet mogelijk; over maxima waarin $u_{xx} = 0$ en $u_t = 0$ is niet zo makkelijk een uitspraak te doen.

Eenduidigheid

Een maximumprincipe levert meteen eenduidigheid voor een Dirichletprobleem. Want stel er zijn twee oplossingen u_1 en u_2 die voldoen aan het inhomogene probleem:

$$\begin{aligned} (u_1)_t - (u_1)_{xx} &= F(x, t), & u_1(x, 0) &= f(x), & u_1(0, t) &= g_0(t), & u_1(1, t) &= g_1(t), \\ (u_2)_t - (u_2)_{xx} &= F(x, t), & u_2(x, 0) &= f(x), & u_2(0, t) &= g_0(t), & u_2(1, t) &= g_1(t). \end{aligned}$$

Dan voldoet hun verschil $v \equiv u_2 - u_1$ aan

$$v_t - v_{xx} = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0.$$

Wegens het maximum principe is $v \equiv 0$ en daarmee $u_1 \equiv u_2$.

Energie afschattingen

Wanneer de randvoorwaarden van een bepaald type zijn, bijvoorbeeld Dirichlet of Neumann, kunnen we een energie afschatting geven (u wordt reëel verondersteld)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= \frac{1}{2} ((u_t, u)) + \frac{1}{2} ((u, u_t)) = ((u, u_{xx})) = -((u_x, u_x)) + \langle u, u_x \rangle|_0^1 \\ &= -\|u_x\|^2 + \langle u(1), u_x(1) \rangle - \langle u(0), u_x(0) \rangle. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Bij homogene Dirichlet of Neumann randvoorwaarden, of bij periodieke voorwaarden, volgt meteen

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq 0.$$

We zullen dit straks algemener bekijken. Zo'n energie afschatting levert goed-gesteldheid op; zie Hoofdstuk 5.3.

Gladheid van de oplossing

Oplossingen van dit type parabolische vergelijkingen zijn willekeurig glad voor $t > 0$, ongeacht hoe wild de beginvoorwaarde op $t = 0$ is. We zullen schetsen hoe dit aangetoond kan worden. Hiertoe beschouwen we de warmtegeleidingsvergelijking, dan wel op een oneindig groot gebied en eisen dat de oplossing voldoende snel afneemt op oneindig, dan wel op een periodiek gebied. In beide gevallen raken we de stoktermen na partiële integratie kwijt.

Bekijk $v = u_x$ (neem voor de eenvoud aan dat alle variabelen reëel zijn). Deze voldoet aan $v_t = v_{xx}$ en dus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((tv, v)) &= ((v + tv_t, v)) + ((tv, v_t)) \\ &= ((v, v)) + 2t((v, v_t)) = ((v, v)) + 2t((v, v_{xx})) \\ &= ((v, v)) - 2t((v_x, v_x)) = \|u_x\|^2 - 2t\|v_x\|^2. \end{aligned}$$

Combineer dit met de afchatting voor $d\|u\|^2/dt$ uit (6.5) (zonder stoktermen), dan volgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \frac{d}{dt}((tv, v)) = -2t\|v_x\|^2 \leq 0.$$

Integreer dit tussen 0 en t tot

$$\frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 - \frac{1}{2} \|u(\cdot, 0)\|^2 + t \|v(\cdot, t)\|^2 \leq 0,$$

zodat wegens $v = u_x$

$$t \|u_x\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u(\cdot, 0)\|^2 = \frac{1}{2} \|f\|^2. \quad (6.6)$$

Voor hogere orde afgeleiden is een soortgelijke redenering te houden. \square

In deze afchatting komt alleen $\|f\|$ voor, en niet zijn afgeleiden naar x . Dus zodra $\|f\|$ begrensd is, zijn alle afgeleiden van de oplossing begrensd voor $t > 0$ (ook al hoeft dit voor $t = 0$ waar $u = f$ niet het geval te zijn). Een rechtstreekse aanpak zoals boven gegeven in (6.5) had een afchatting voor $\|u_x\|$ gegeven in termen van $\|f_x\|$; deze is onbruikbaar zodra $\|f_x\|$ onbegrensd wordt.

6.2 Algemene begin/randwaarde problemen

Beschouw het n -dimensionale stelsel

$$u_t = A(x, t)u_{xx} + B(x, t)u_x + C(x, t)u + F(x, t)$$

op de strip $0 \leq x \leq 1, t \geq 0$.

Op $t = 0$ geven we beginwaarden

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Links en rechts schrijven we n randvoorwaarden voor van het homogene type

$$\begin{cases} L_{0D}u(0, t) + L_{0N}u_x(0, t) = 0, \\ L_{1D}u(1, t) + L_{1N}u_x(1, t) = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Om presentatie redenen beperken we ons tot het reële en symmetrische geval $A(x, t) = A^*(x, t)$. We nemen verder aan dat de eigenwaarden van A niet willekeurig dicht bij 0 komen, d.w.z.

$$\lambda_A(x, t) \geq \delta > 0.$$

Uit het constante-coëfficiënten geval voor het Cauchy probleem weten we al dat deze voorwaarde voldoende is (en niet ver van noodzakelijk) om groeien van de oplossing te voorkomen.

De randvoorwaarden (6.7) mogen niet willekeurig zijn. We formuleren een criterium waarvan we hier aantonen dat dit voldoende is. Via Laplace technieken is aan te tonen dat het verre van noodzakelijk is [K & L].

Criterium voor randvoorwaarden Voor alle functies $w(x) \in C^\infty$ die aan de randvoorwaarden (6.7) voldoen moet gelden

$$\langle w, Aw_x \rangle|_0^1 \leq \frac{\delta}{2} \|w_x\|^2 + c \|w\|^2, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.8)$$

Let wel: Deze w is een willekeurige oneindig gladde functie, en hoeft niets met de PDV te maken te hebben; daarom is dit criterium dan ook te zwaar. Wel weten we dat een oplossing van een parabolische vergelijking oneindig glad is (zie §6.1).

Voorbeelden We vermelden nu enkele soorten randvoorwaarden die aan bovenstaand criterium voldoen.

- Homogeen Dirichlet $u(0, t) = u(1, t) = 0$ of homogeen Neumann $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$. Hiervoor is $\langle w, Aw_x \rangle|_0^1$ altijd 0.
- Robin $L_{jD}u(j, t) + u_x(j, t) = 0$ ($j = 0, 1$). Nu geldt

$$\langle w, Aw_x \rangle|_0^1 = \langle w, -AL_{jD}w \rangle|_0^1 \leq c_1 |w(0, t)|^2 + c_2 |w(1, t)|^2,$$

waarbij de coëfficiënten c_1 en c_2 de norm van AL_{jD} majoreren. De Sobolev ongelijkheid (A.7)

$$\|w\|_\infty^2 \leq \epsilon \|w_x\|^2 + c(\epsilon) \|w\|^2, \quad \epsilon > 0$$

levert nu de gevraagde eigenschap (6.8) voor deze randvoorwaarde.

Energie afschatting

Door gebruik te maken van de ongelijkheden van Cauchy-Schwarz en Hölder (zie Appendix B) en van bovengenoemd criterium voor de randvoorwaarden is de volgende afschatting te maken:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((u, u)) &= \frac{1}{2} ((u_t, u)) + \frac{1}{2} ((u, u_t)) = \\ &= ((u, Au_{xx})) + \frac{1}{2} ((Bu_x + Cu + F, u)) + \frac{1}{2} ((u, Bu_x + Cu + F)) \\ &\leq ((u, Au_{xx})) + |B| \|u\| \|u_x\| + |C| \|u\|^2 + \|u\| \|F\| \\ &= ((u, (Au_x)_x)) - ((u, A_x u_x)) + \dots \\ &\leq -((u_x, Au_x)) + \langle u, Au_x \rangle|_0^1 + c_1 \|u\| \|u_x\| + |C| \|u\|^2 + \|u\| \|F\| \\ &\leq -\delta \|u_x\|^2 + \frac{\delta}{2} \|u_x\|^2 + c \|u\|^2 + c_1 \left\{ \frac{\delta}{2c_1} \|u_x\|^2 + c_2 \|u\|^2 + c_3 \|F\|^2 \right\} \\ &\leq c_4 \|u\|^2 + c_5 \|F\|^2. \end{aligned}$$

Volgens Gronwall's Lemma A.10 groeit $\|u\|^2$ dus nooit harder dan $e^{2c_4 t}$, waarmee

$$\|u\|^2 \leq K_T \left\{ \|f\|^2 + \int_0^t \|F\|^2 dt \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

We hebben nu het soort afchatting waar we in §5.6 naar op zoek waren.

Opmerking 1 Het is goed om op te merken dat deze afchatting lukt bij variabele coëfficiënten, waar Fourier/Laplace analyse het laat afweten.

Opmerking 2 Als A niet symmetrisch is moeten we de Lyapunov matrix H te hulp roepen (zie Appendix A.1).

Hoofdstuk 7

ELLIPTISCHE RANDWAARDE PROBLEMEN

In de voorgaande hoofdstukken hebben we ons hoofdzakelijk met evolutie problemen bezig gehouden; deze zijn hyperbolisch en/of parabolisch. We gaan nu elliptische vergelijkingen bekijken; deze corresponderen noodzakelijkerwijs¹ met stationaire problemen. Als speciaal voorbeeld zal de potentiaalvergelijking (= de vergelijking van Laplace) optreden.

7.1 Potentiaalvergelijking

We beschouwen allereerst de potentiaalvergelijking op een gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ($s = 2, 3$), met rand $\partial\Omega = \Gamma$

$$\Delta\varphi = 0, \quad x \in \Omega, \quad \varphi \in \mathbb{C}. \quad (7.1)$$

Op de rand $\partial\Omega$ geven we randvoorwaarde

$$L_0\varphi + L_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \text{gegeven}, \quad (7.2)$$

met $\partial\varphi/\partial n = n \cdot \nabla\varphi$ de normaalafgeleide. Een oplossing van (7.1) heet een *harmonische* functie.

Enkele hulprelaties

Begin bij de Stelling van Gauss

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, d\Omega = \int_{\Gamma} u \cdot n \, d\Gamma.$$

Met $u = \psi \operatorname{grad} \varphi$ ontstaat de 1^e Stelling van Green:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi + \psi \Delta\varphi) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\Gamma. \quad (7.3)$$

Idem met $u = \varphi \operatorname{grad} \psi$ en aftrekken leidt tot de 2^e Stelling van Green:

$$\int_{\Omega} (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \, d\Gamma. \quad (7.4)$$

¹Als er een instationaire elliptische vergelijking zou bestaan, dan zou je hiermee het verleden kunnen beïnvloeden. Tot dusver lukt dat alleen nog maar in de science fiction literatuur.

Deze relaties hebben directe gevolgen voor harmonische functies. Als $\Delta\varphi = 0$ dan:

$$i) \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Gamma = 0; \quad (7.5)$$

$$ii) \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Gamma. \quad (7.6)$$

Eenduidigheid binnengebied

Stel φ_1 en φ_2 zijn beide oplossingen van (7.1) met *Dirichlet* randvoorwaarde $\varphi =$ gegeven op $\partial\Omega$. Dan voldoet $\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ aan (7.1) met homogene randvoorwaarden. Uit (7.6) volgt $|\nabla\varphi| = 0 \Rightarrow \varphi = \text{Constant} \Rightarrow \varphi = 0$. De eenduidigheid van het Dirichlet probleem is hiermee aangetoond.

Stel φ_1 en φ_2 voldoen beide aan (7.1) met *Neumann* randvoorwaarden $\partial\varphi/\partial n =$ gegeven. De verschil functie φ levert via (7.6) weer op $\varphi = \text{Constant}$. Het Neumann probleem is op een constante na bepaald. De op te leggen randvoorwaarde moet wel voldoen aan de *compatibiliteitsvoorwaarde* (7.5) anders bestaat er zeker geen oplossing.

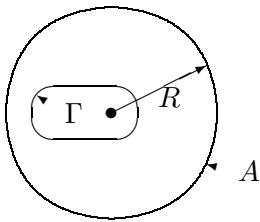
Bekijk tenslotte het *Robin* probleem $\frac{\partial\varphi}{\partial n} + h\varphi =$ gegeven met $h \geq 0$. Relatie (7.6) levert voor de verschiloplossing

$$\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega + \int_{\Gamma} h\varphi^2 d\Gamma = 0 \Rightarrow |\nabla\varphi|^2 = 0 \Rightarrow \varphi = \text{Constant}.$$

Wanneer ergens $h > 0$ dan ook $\varphi = 0$. Dus het Robin probleem met $h \geq 0$ is eenduidig oplosbaar.

Eenduidigheid buitengebied (3-D)

We komen ook vaak tegen het geval dat we buiten Γ een harmonische functie moeten zoeken (*buitengebied*). Op het oneindige eisen we meestal dat de oplossing regulier moet zijn: in 3-D moeten $R\varphi$ en $R^2\nabla\varphi$ begrensd blijven als $R \rightarrow \infty$.



Neem buiten Γ een bol A met straal R . Voor het volumen Ω^* tussen Γ en A geldt de 1^e Stelling van Green (7.3) (met $\psi = \varphi$)

$$\int_{\Omega^*} (\nabla\varphi)^2 d\Omega^* = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Gamma + \int_A \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA$$

Laat $R \rightarrow \infty$ gaan, dan

$$\left| \int_A \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA \right| \leq \int_A |\varphi| \left| \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right| dA \leq \frac{M_1}{R} \frac{M_2}{R^2} \cdot 4\pi R^2 \rightarrow 0 \text{ als } R \rightarrow \infty.$$

Op analoge wijze als boven vinden we eenduidigheid.

Er is één verschil, namelijk de compatibiliteitsvoorwaarde voor het Neumann probleem hoeft niet te gelden. Er geldt wel $\int_A \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA + \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Gamma = 0$, ook voor niet bolvormige A . Dus voor elk

oppervlak Γ^* geldt $\int_{\Gamma^*} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma^* = \text{Constant}$.

N.B. Als $\partial \varphi / \partial n$ harder dan $1/R^2$ afneemt wordt de laatste constante toch weer 0; ga dit na door een grote bol te beschouwen!

Stelling van het gemiddelde

Stelling 7.1 De waarde van een harmonische functie in een punt $P \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ is gelijk aan het gemiddelde van de functiewaarden over een willekeurige cirkel c.q. cirkelschijf met middelpunt P (zolang deze binnen Ω blijft). Analoog in \mathbb{R}^3 .

Bewijs Sla om het punt P een cirkel ∂K_a met straal a (liggend binnen Ω). Voor elke cirkel rond P geldt (7.5). Integreer nu

$$0 = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\theta \right) dr = \int_0^{2\pi} (\varphi(a, \theta) - \varphi_P) d\theta = \int_0^{2\pi} \varphi(a, \theta) d\theta - 2\pi \varphi_P$$

$$\text{dus } \varphi_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial K_a} \varphi d\partial K_a. \quad (7.7)$$

Dus in het punt P is φ het gemiddelde van de waarden die φ aanneemt op een cirkel rond P (zolang deze binnen Ω blijft). Verder geldt

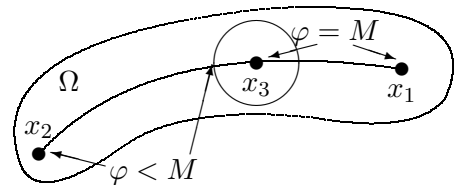
$$\int_{K_A} \varphi dK_A = \int_0^A \left[\int_{\partial K_a} \varphi d\partial K_a \right] da = \int_0^A 2\pi a \varphi_P da = \pi A^2 \varphi_P,$$

zodat φ_P ook het gemiddelde over de cirkelschijf is. In 3-D geldt dit met ‘bol’ in plaats van ‘cirkel’. \square

Maximumprincipe

Stelling 7.2 Een harmonische functie is constant, of neemt zijn maxima/minima aan op de rand (bij eindig gebied Ω).

Bewijs Neem aan φ bezit een maximum M in een inwendig punt x_1 van Ω . Stel φ is niet constant, dan is er een punt $x_2 \in \Omega$ waar $\varphi < M$. Trek een verbindingskromme tussen x_1 en x_2 en bekijk het eerste punt vanuit x_2 gezien waar $\varphi = M$ wordt. Noem dit punt x_3 en sla hier een cirkel omheen. Dan geldt rond het snijpunt met de verbindingskromme dat $\varphi < M$ op een stuk van de cirkel; op de rest van de cirkel is $\varphi \leq M$. In x_3 zelf was $\varphi = M$ zodat daar de Stelling van het gemiddelde niet geldt. Tegenspraak! Dus φ kan geen (lokale) maxima in het inwendige aannemen \Rightarrow maxima kunnen alleen op de rand optreden. Het bewijs voor minima loopt analoog (vervang φ door $-\varphi$). \square



7.2 Elliptische operatoren

In het algemeen kunnen we kijken naar elliptische differentiaalvergelijkingen van het type ($u \in \mathbb{C}^1$)

$$\sum_{i,j=1}^s a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^s b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = F,$$

waarbij de matrix (a_{ij}) eigenwaarden heeft met allemaal hetzelfde teken (zie §3.3). We mogen sowieso (a_{ij}) symmetrisch veronderstellen. Dus in het elliptische geval is (a_{ij}) dan wel positief definitief dan wel negatief definitief.

In één ruimte dimensie keken we naar het Fourier symbool: voor au_{xx} levert dit op $P(i\omega) = -a\omega^2$ (let op het $-$ teken). We kunnen het Fourier symbool generaliseren naar meer dimensies, maar dat werken we hier niet uit. We merken op dat we $P(i\omega)$ kunnen opvatten als operator werkend op Fouriercomponenten; dit gaan we generaliseren.

Definiër de operator A via

$$Au = \left[\sum_{i,j=1}^s a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] u \quad (7.8)$$

werkend op voldoende gladde functies gedefiniëerd in een gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^s$. Op de rand $\partial\Omega$ laten we deze functies voldoen aan bepaalde randvoorwaarden, bijvoorbeeld homogeen Dirichlet ($u = 0$), Neumann of Robin. Noem deze klasse van functies V_A .

We kunnen laten zien dat in sommige van deze gevallen de operator A positief is, en vaak zelfs positief definitief.

Definitie 7.3

A is symmetrisch of zelfgeadjungeerd als $((Au, v)) = ((u, Av)), \forall u, v \in V_A$;

A is positief als $((Au, u)) > 0, \forall u \neq 0 \in V_A$;

A is positief definitief als $((Au, u)) \geq c\|u\|^2$ ($c > 0$), $\forall u \in V_A$.

Voorbeeld

Bekijk de Laplace operator $Au = -\Delta u$ (let op het $-$ teken) op een gebied Ω met rand $\Gamma = \partial\Omega$. Kies als randvoorwaarden

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0 \quad \text{met } h \geq 0 \quad \text{en } h \text{ niet identiek } 0.$$

Allereerst tonen we de symmetrie aan van de Laplace operator bij deze randvoorwaarden. Gebruik makend van de 2^e Stelling van Green (7.4) volgt

$$\begin{aligned} ((Au, v)) - ((u, Av)) &= \int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} (u \cdot hv - v \cdot hu) \, d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Vervolgens bewijzen we dat A positief is. Er geldt

$$\begin{aligned} ((Au, u)) &= \int_{\Omega} -u\Delta u, u \, d\Omega = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega + \int_{\Gamma} hu^2 \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Wanneer u niet constant is is de eerste term positief. Is u wel constant, maar niet identiek 0, dan is de tweede term in (7.9) positief.

Bij een volledig Neumann probleem gaat het mis omdat voor de oplossing $u = \text{Const} \neq 0$ het rechterlid in (7.9) 0 is ($h \equiv 0$). Vergelijk dit met het Fourier symbool ω^2 dat > 0 is zodra $\omega \neq 0$; maar voor $\omega = 0$, dat wil zeggen de constante, wordt het 0.

Als we willen bewijzen dat A positief definit is moeten we het rechterlid in (7.9) naar beneden kunnen begrenzen met $c\|u\|^2$. Dit is een zeer lastig bewijs. We zullen dat hier geven voor het 1-D geval op $[0, L]$ met homogene Dirichlet randvoorwaarden, maar het kan algemener. We hanteren hierbij de ongelijkheid van Poincaré (Lemma A.12) welke een verband legt tussen de norm van een functie die 0 is op de rand van zijn definitiegebied en de norm van zijn afgeleide:

$$\|u\|^2 \leq L^2 \|u_x\|^2 \text{ als } u(0) = 0.$$

Hiermee gaat in dit geval (7.9) over in

$$((Au, u)) \geq \frac{1}{L^2} \|u\|^2,$$

waarmee het positief-definit zijn is aangetoond.

De grootheid $((Au, u))$ wordt *energie norm* genoemd. Wanneer A positief definit is, is dit een echte norm (ga na). Ook noemen we de operator *elliptisch* of *coërcief* in dit geval.

We moeten onthouden dat de randvoorwaarden een rol spelen bij de zojuist gegeven definities!

7.3 De Ritz formulering

We formuleren nu abstract het elliptische probleem als

$$Au = f, \quad u \in V_A \quad (7.10)$$

en nemen aan dat u aan bepaalde randvoorwaarden voldoet ($u \in V_A$) zodanig dat A positief definit (i.e. coërcief) en zelfgeadjungeerd is (Definitie 7.3).

Stelling 7.4 Wanneer A positief definit is heeft de vergelijking (7.10) hoogstens één oplossing.

Bewijs Stel u_1 en u_2 zijn twee oplossingen. Dan geldt voor $\tilde{u} = u_1 - u_2$: $A\tilde{u} = 0 \implies ((A\tilde{u}, \tilde{u})) = 0 \implies \tilde{u} = 0$. \square

Stelling 7.5 Voor een lineaire zelfgeadjungeerde positief definitie differentiaal operator A geldt dat een eventuele oplossing van $Au = f$ tevens een oplossing is van het minimaliseringsprobleem

$$\min_{u \in V_A} J[u] \text{ met } J[u] = \frac{1}{2}((Au, u)) - ((f, u)). \quad (7.11)$$

Omgekeerd voldoet een oplossing van dit minimaliseringsprobleem aan $Au = f$. We noemen (7.11) de *Ritz formulering*.

Bewijs \Rightarrow : Stel $A\hat{u} = f$ met $\hat{u} \in V_A$. Er geldt

$$\begin{aligned} J[u] &= \frac{1}{2}((Au, u)) - ((A\hat{u}, u)) = \frac{1}{2}((Au, u)) - \frac{1}{2}((A\hat{u}, u)) - \frac{1}{2}((\hat{u}, Au)) \\ &= \frac{1}{2}\{((Au, u)) - ((A\hat{u}, u)) - ((Au, \hat{u})) + ((A\hat{u}, \hat{u})) - ((A\hat{u}, \hat{u}))\} \\ &= \frac{1}{2}((A(u - \hat{u}), (u - \hat{u}))) - \frac{1}{2}((A\hat{u}, \hat{u})). \end{aligned}$$

Omdat A positief-definiet is geldt $((A(u - \hat{u}), (u - \hat{u}))) > 0$ tenzij $u = \hat{u}$. Voor $u = \hat{u}$ bereikt $J[u]$ dus zijn minimum.

\Leftarrow : Gaan we omgekeerd uit van een oplossing \hat{u} van (7.11) dan moet gelden

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} J[\hat{u} + \epsilon v] \right|_{\epsilon=0} = 0 \text{ voor alle } v \in V_A.$$

Nu is $J[\hat{u} + \epsilon v]$ een kwadratische functie van ϵ , namelijk

$$\frac{1}{2}((A\hat{u}, \hat{u})) + \epsilon((A\hat{u}, v)) + \frac{1}{2}\epsilon^2((Av, v)) - ((f, \hat{u})) - \epsilon((f, v)),$$

zodat dit leidt tot

$$((A\hat{u} - f, v)) = 0 \text{ voor alle } v \in V_A.$$

Hieruit volgt dan dat $A\hat{u} = f$. □

Existentie van een oplossing van (7.11) kan bewezen worden via functionaalanalytische methoden, waarbij de stelling van Riesz een belangrijke rol speelt. Bij de eindige elementenmethode wordt vaak uitgegaan van de Ritz formulering, of van de Galerkin formulering uit de volgende paragraaf.

7.4 Zwakke oplossingen en Galerkin

Lang niet altijd zal A een zelfgeadjungeerde operator zijn, zodat een Ritz formulering niet mogelijk is. In dit geval kunnen we nog eens kijken naar een uitdrukking als

$$((Au - f, v)) = 0 \text{ voor alle } v \in V_A. \quad (7.12)$$

Wanneer u een oplossing is van $Au = f$ dan is aan (7.12) voldaan. Als A positief-definiet is dan is er hoogstens één functie u waarvoor (7.12) geldt (bewijs als net). We kunnen dus ook ons probleem (7.10) definiëren als:

$$\text{Vind de functie } u \in V_A \text{ waarvoor geldt } ((Au - f, v)) = 0 \text{ voor alle } v \in V_A. \quad (7.13)$$

Via partiële integratie is het mogelijk om enkele differentiaties van u over te hevelen naar v . Dan ontstaat de *methode van Galerkin*; we spreken ook van een *zwakke formulering*.

Voorbeeld Neem $A = \Delta$ en $u \in \mathbb{C}^1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega &= \int_{\Omega} -\nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} u \Delta v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Binnen de klasse V_A vallen alle stoktermen weg, zodat

$$((\Delta u - f, v)) = 0 \quad , \quad \forall v \in V_A$$

overgaat in

$$-((\nabla u, \nabla v)) - ((f, v)) = 0 \quad , \quad \forall v \in V_A.$$

In de laatste formulering worden aan u zwakkere differentieerbaarheidseigenschappen gesteld. Zie verder het college Eindige Elementenmethoden.

Hoofdstuk 8

POTENTIALTHEORIE

In dit hoofdstuk gaan we concreter in op het construeren van oplossingen van de potentiaalvergelijking. Er is een grote verscheidenheid aan wiskundige technieken hiervoor beschikbaar. In het college Inleiding Mathematische Fysica is de methode van *separatie van variabelen* reeds behandeld. Voor 2-D problemen vormt *complexe functietheorie* (met name conforme afbeeldingen) een krachtig hulpmiddel; deze methode zal in het college Stromingsleer worden gedemonstreerd. In dit hoofdstuk zal het gebruik van *Greense functies* worden uitgelegd (§ 8.1-8.2). Daarnaast komt toepassing van *singulariteitenbeleggingen* aan de orde (§ 8.3-8.4).

8.1 De functie van Green

Begin met de 2^e Stelling van Green (7.4)

$$\int_{\Omega} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, d\partial\Omega. \quad (8.1)$$

Stel we kennen een functie $G(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$ zodanig dat

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta G \, d\Omega = \varphi(\boldsymbol{x}) \quad \text{en} \quad G|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8.2)$$

Het ‘echte’ argument van G is $\boldsymbol{\xi}$, alle differentiaties zijn naar deze variabele; \boldsymbol{x} is een parameter die we in gedachten vast houden (bij elke \boldsymbol{x} hoort een andere G). Pas nu (8.1) toe met $\psi = G$. Dan voldoet een harmonische functie φ (dat wil zeggen een functie waarvoor $\Delta\varphi = 0$) aan

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \, d\partial\Omega. \quad (8.3)$$

Met andere woorden, de oplossing van $\Delta\varphi = 0$ kan hiermee rechtstreeks uit zijn randwaarden op $\partial\Omega$ bepaald worden.

Zo’n functie G heet *Greense functie* voor het Dirichlet probleem. Door Green (1793–1841) is deze in 1828 voor het eerst geformuleerd, maar pas na zijn dood gepubliceerd (tussen 1850 en 1854).

¹Omdat we in dit hoofdstuk voor de plaatsaanduiding regelmatig gebruik maken van zowel de vectornotatie \boldsymbol{x} als de naar coördinaatrichtingen uitgeschreven notatie (x, y) , geven we het onderscheid hier aan via een al of niet vet lettertype.

De Greense functie is voor regelmatige gebieden vaak te construeren (zie § 8.2).

We merken op dat bij andere randvoorwaarden voor φ ook de Greense functie op $\partial\Omega$ anders gedefinieerd moet worden. Ga zelf na hoe; zie ook Vraagstuk 22.

Uit de eis (8.2) volgt dat $\Delta G = 0$ moet zijn, behalve in $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$. We mogen schrijven

$$\Delta G = \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}),$$

met δ de Dirac delta functie (zie college Distributietheorie).

2 dimensies

Bekijk nu in 2-D de functie

$$g(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}| = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (8.4)$$

met r de afstand vanaf het punt \mathbf{x} . In poolcoördinaten rond dit punt luidt de Laplace vergelijking

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}.$$

Na invulling blijkt dat $g(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x})$ uit (8.4) voldoet aan $\Delta g = 0$, behalve waar $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$.

Om te laten zien dat $\Delta g = \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})$ is het genoeg om aan te tonen dat

$$\int_{\Omega} \Delta g \, d\Omega = 1$$

voor elk gebied Ω waar $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ binnen ligt. Aangezien $\Delta g = 0$ voor elk punt $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{x}$ mogen we voor Ω een willekeurige cirkelschijf K_r (met straal r) rond $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ nemen. Uitwerken levert

$$\int_{\Omega} \Delta g \, d\Omega = \int_{K_r} \Delta g \, dK_r = \int_{\partial K_r} \frac{\partial g}{\partial n} \, d\partial K_r = \int_{\partial K_r} \frac{1}{2\pi r} \, d\partial K_r = 1.$$

De functie g uit (8.4) voldoet dus aan de eerste eis in (8.2). We noemen deze functie de *karacteristische singulariteit*.

De functie g voldoet nog niet aan de tweede eis in (8.2). Wanneer we nu een harmonische functie \tilde{g} kunnen vinden met

$$\tilde{g}|_{\partial\Omega} = -g|_{\partial\Omega},$$

dan wordt uiteindelijk de Greense functie gegeven door

$$G = g + \tilde{g}.$$

Opmerking 1 Een wiskundig nettere afleiding wordt verkregen door in de 2^e Stelling van Green (8.1) een willekeurig klein cirkelschijfje K_ϵ rond $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ (waar G singulier is) uit te sluiten

$$\int_{\Omega \setminus K_\epsilon} (\varphi \Delta G - G \Delta \varphi) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, d\partial\Omega + \int_{\partial K_\epsilon} \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, d\partial K_\epsilon. \quad (8.5)$$

Het linkerlid in (8.5) is nu gewoon 0, maar in het rechterlid gaat het eerste deel van de integraal over ∂K_ϵ een bijdrage leveren die voor $\epsilon \rightarrow 0$ gelijk wordt aan $-\varphi(\mathbf{x})$ (op de rand van K_ϵ geldt $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$, en verder is daar $G \approx g$). Het tweede deel van deze integraal gaat naar 0, zodat we na invulling van $G|_{\partial\Omega} = 0$ weer de relatie (8.3) overhouden.

Opmerking 2 Dezelfde Greense functie kan ook worden gebruikt voor het oplossen van het Poisson probleem

$$\Delta\varphi = f \text{ in } \Omega \text{ met } \varphi \text{ gegeven op } \partial\Omega.$$

Bovenstaande afleiding langslopend zien we dat de oplossing (8.3) generaliseert tot

$$\varphi(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} d\partial\Omega + \int_{\Omega} G f d\Omega.$$

Opmerking 3 In 3-D is de karakteristieke singulariteit

$$g(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (8.6)$$

8.2 Voorbeelden van Greense functies

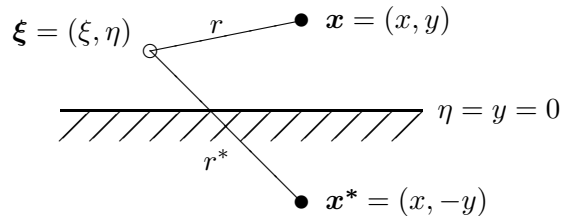
De Greense functie voor een halfvlak

Als eerste voorbeeld gaan we het Dirichlet probleem voor een halfvlak $\Omega = \{x \equiv (x, y) | y \geq 0\}$ bekijken

$$\Delta\varphi = 0 \text{ in } \Omega \quad \text{met randvoorwaarde} \quad \varphi(x, 0) = F(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (8.7)$$

De Greense functie voor dit probleem moet in het punt $(\xi, \eta) = (x, y)$ de karakteristieke singulariteit bezitten. Verder moet deze op de ξ -as 0 zijn en in het oneindige regulier (zoals in § 7.1 gedefinieerd).

We vinden deze Greense functie met behulp van een spiegelpunt. In het punt $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi, \eta) = (x, y) \equiv \mathbf{x}$ leggen we een bron (met potentiaal $\ln r/2\pi$, waarin $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$) en in het spiegelpunt $\boldsymbol{\xi} = (x, -y) \equiv \mathbf{x}^*$ een put (met potentiaal $-\ln r^*/2\pi$, waarin $r^* = |\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}|$). Dan ontstaat een functie



$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln r - \frac{1}{2\pi} \ln r^* = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}, \quad (8.8)$$

die anti-symmetrisch is t.o.v. de ξ -as, zodat $G(\xi, 0; x, y) = 0$. Op het oneindige gedraagt deze functie zich als

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}} \approx \frac{1}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{4\eta y}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) \approx \frac{-\eta y}{\pi r^2} = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

hetgeen dus voldoende snel afneemt.

Op de x -as geldt

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\xi, 0) = -\frac{\partial G}{\partial \eta}(\xi, 0) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{1}{2\pi r^*} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} = \frac{1}{2\pi r} \frac{y - \eta}{r} + \frac{1}{2\pi r^*} \frac{y + \eta}{r^*} = \frac{y}{\pi r^2}$$

(voor $\eta = 0$ is $r = r^*$). Na toepassing van de formule (8.3) wordt de oplossing van het halfvlak probleem (8.7) nu gegeven door

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (8.9)$$

Bij een Neumann probleem vervangen we de put in $(x, -y)$ door een bron. De combinatie van deze twee bronnen levert een functie die symmetrisch is t.o.v. de ξ -as, zodat daar dan $\partial G / \partial n = 0$ wordt (waarom willen we dat?). Op de ξ -as geldt – vergelijk (8.8) –

$$G(\xi, 0; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{2\pi} \ln r^* = \frac{1}{\pi} \ln r.$$

De oplossing van het Neumann probleem met randvoorwaarde $\partial\varphi/\partial y(x, 0) = V(x)$ wordt dan

$$\varphi(x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, 0; x, y) \frac{\partial\varphi}{\partial n}(\xi, 0) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

Loop zelf alle stappen in deze afleiding na!

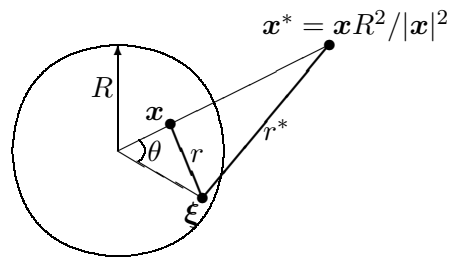
We merken vast op dat we bovenstaande formules in § 8.3 weer tegen zullen komen, maar dan langs andere weg afgeleid.

De Greense functie voor een cirkel

Beschouw een cirkel met straal R . Het analogon van het spiegelpunt van net is nu om aan een punt \mathbf{x} toe te voegen een punt \mathbf{x}^* volgens

$$\mathbf{x}^* = \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x},$$

dat wil zeggen $|\mathbf{x}^*| |\mathbf{x}| = R^2$.



Stelling 8.1 De Greense functie voor de cirkel wordt gegeven door

$$G(\xi; \mathbf{x}) = g(r) - g\left(\frac{|\mathbf{x}|}{R} r^*\right) \quad (8.10)$$

waarin g de karakteristieke singulariteit is.

Bewijs De functie heeft voor $\xi = \mathbf{x}$ de karakteristieke singulariteit. Resteert te bewijzen dat $G = 0$ op de rand van de cirkel. Neem dus ξ op de cirkel, dan geldt

$$r^2 = R^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2|\mathbf{x}|R \cos \theta$$

en

$$\frac{|\mathbf{x}|^2}{R^2} (r^*)^2 = \frac{|\mathbf{x}|^2}{R^2} \left(\frac{R^4}{|\mathbf{x}|^2} + R^2 - 2\frac{R^2}{|\mathbf{x}|} R \cos \theta \right).$$

We observeren dat beide rechterleden gelijk zijn, waarmee het gestelde bewezen is. \square

Opmerking De stelling geldt ook in 3-D.

We kunnen nu het Dirichletprobleem voor de cirkel oplossen voor willekeurige randvoorwaarden $u|_{\partial K_R} = f$. Uitgedrukt in G wordt deze oplossing

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial K_R} f(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{x}) d\partial K_R.$$

We moeten nu $\partial G/\partial n$ uitrekenen, dat wil zeggen we moeten $\boldsymbol{\xi}$ op de rand kiezen en deze in normaalrichting variëren. Algemeen geldt

$$r^2 = |\boldsymbol{\xi}|^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2|\boldsymbol{\xi}||\mathbf{x}|\cos\theta$$

en

$$(r^*)^2 = |\boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{R^4}{|\mathbf{x}|^2} - 2\frac{R^2}{|\boldsymbol{\xi}||\mathbf{x}|}\cos\theta.$$

Omdat $\partial/\partial n = \partial/\partial|\boldsymbol{\xi}|$ vinden we

$$2r \frac{\partial r}{\partial n} = 2|\boldsymbol{\xi}| - 2|\mathbf{x}|\cos\theta \quad \text{en} \quad 2r^* \frac{\partial r^*}{\partial n} = 2|\boldsymbol{\xi}| - 2\frac{R^2}{|\mathbf{x}|}\cos\theta,$$

zodat

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left[\ln r - \ln \frac{|\mathbf{x}|}{R} r^* \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial r^*}{\partial n} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} (|\boldsymbol{\xi}| - |\mathbf{x}|\cos\theta) - \frac{1}{2\pi (r^*)^2} (|\boldsymbol{\xi}| - \frac{R^2}{|\mathbf{x}|}\cos\theta) \end{aligned}$$

Op de rand waar $|\mathbf{x}| = R$ en $(r^*)^2 = \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} r^2$, volgt

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial K_R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{r^2}.$$

Hiermee wordt de oplossing van het Dirichletprobleem voor een cirkel K_R met randvoorwaarde $u = f$ gegeven door de *integraal van Poisson*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{2\pi R} \int_{\partial K_R} f(\mathbf{s}) \frac{d\partial K_R}{|\mathbf{s} - \mathbf{x}|^2}. \quad (8.11)$$

8.3 Singulariteitenbeleggingen

In het college Inleiding Mathematische Fysica zijn enkele elementaire oplossingen van de potentiaalvergelijking behandeld: ‘bronnen’ en ‘dipolen’. We voegen daar hier nog één aan toe - nauw verwant aan de bronnen - namelijk ‘wervels’. Daarna gaan we hiermee het stromingsveld rond een vliegtuig formuleren.

Bron

De potentiaal t.g.v. een bron zijn we net al tegengekomen als karakteristieke singulariteit.

$$\text{2-D: } \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{en} \quad \text{3-D: } \varphi = -\frac{Q}{4\pi r} \quad (8.12)$$

geven de potentiaal behorende bij een bron ter sterkte Q in de oorsprong.

Waarom heet het een bron? Beschouw een cirkel/bol met straal a om de oorsprong; dan geldt

$$\int_{\text{bol}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\text{bol}} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\Gamma \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in 2-D: } = 2\pi a \cdot \frac{Q}{2\pi a} = Q \\ \text{in 3-D: } = 4\pi a^2 \cdot \frac{Q}{4\pi a^2} = Q \end{array} \right.$$

We zien hieraan dat door het oppervlak van de bol een hoeveelheid flux naar buiten stroomt gelijk aan Q .

Het snelheidsveld $\nabla\varphi$ behorend bij een bron is radiaal gericht

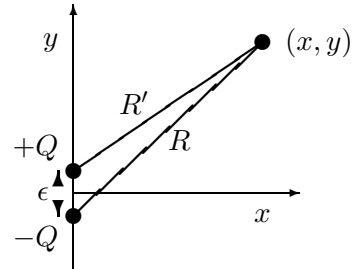
$$\text{2-D: } \nabla\varphi = \frac{Q}{2\pi r} \mathbf{e}_r; \quad (8.13)$$

\mathbf{e}_r is de eenheidsvector in r -richting.

Dipool

Een dipool ontstaat door een bron en een put (= negatieve bron) van gelijke sterkte tot elkaar te laten naderen.

Beschouw een bron met sterkte Q gelegen $\frac{1}{2}\epsilon$ boven de x -as; en een put ($-Q$) symmetrisch daaronder. Laat straks $\epsilon \rightarrow 0$ met $Q\epsilon = M = \text{constant}$.



$$\begin{aligned} \varphi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} (\ln R' - \ln R) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi} \frac{\ln R' - \ln R}{\epsilon} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} (\ln R) \\ &= -\frac{M}{2\pi} (\mathbf{e}_y \cdot \nabla \ln R) \\ &= -\frac{M}{2\pi R} (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r) = -\frac{M}{2\pi R} \cos(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_r) \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\text{In 3-D: } \varphi = \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{M}{4\pi R^2} \cos(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_r)$$

Let wel: \mathbf{e}_y is de richting van de dipool.

Wervel

De stroomlijnen van de wervel zijn cirkels, en zijn de orthogonale trajectorieën van de stroomlijnen van de bron. De potentiaal van een wervel wordt gegeven door (2D)

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad \text{Snelheidsvector: } -\frac{\Gamma}{2\pi r}e_\theta$$

waarbij θ de hoek is tussen de voerstraal en een vaste as (bijvoorbeeld de reële as). Merk op dat φ meerwaardig is!

Discontinuïteiten

Beschouw de potentiaal van een bronbelegging langs de x -as met sterkte $q(x)$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (8.15)$$

We nemen aan dat q voldoende sterk afneemt als $|\xi| \rightarrow \infty$ zodat de integraal convergeert.

We gaan laten zien dat φ continu is over de x -as, maar dat $\partial\varphi/\partial n$ een sprong vertoont. Voor het snelheidsveld dat hierbij hoort betekent dat een continue langssnelheid maar een discontinue normaalsnelheid.

Als $y \rightarrow 0$, dan nadert φ naar de ‘nette’ integraal

$$\varphi(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \ln |x - \xi| d\xi. \quad (8.16)$$

Maar bij $\partial\varphi/\partial n$ gedraagt de integrand zich vervelender

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (8.17)$$

We laten (x, y) naderen naar het punt $(x, 0)$ op de x -as. Van de integraal splitsen we af een omgeving rond $(x, 0)$ met straal δ waarbinnen $|q(\xi) - q(x)| < \epsilon$. Dus

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty} \right\} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} \right] \frac{q(\xi) y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (8.18)$$

Op het stuk $(-\infty, x - \delta]$ en $[x + \delta, \infty)$ wordt de noemer niet nul. De factor y in de teller zorgt ervoor dat deze bijdrage naar 0 gaat als $y \rightarrow 0$. Resteert het stuk $(x - \delta, x + \delta)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{q(\xi) y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{q(x) y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{(q(\xi) - q(x)) y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

De eerste term kan analytisch

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{q(x)}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{q(x)}{2\pi} \left[\arctan \frac{\xi-x}{y} \right]_{x-\delta}^{x+\delta} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{q(x)}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{\delta}{y} \right) - \arctan \left(-\frac{\delta}{y} \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{2}q(x) & \text{als } y \downarrow 0 \\ -\frac{1}{2}q(x) & \text{als } y \uparrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De tweede term kan analoog afgeschat worden met $\epsilon/2$.

Voor de potentiaal van een bronbelegging op de x -as vinden we dus $(\partial\varphi/\partial n)^+ = \frac{1}{2}q$ en $(\partial\varphi/\partial n)^- = -\frac{1}{2}q$ (n wijst aan beide zijden naar boven). Dit is een speciaal geval. In het algemeen zal de bijdrage van het eerste stuk in (8.18) niet naar 0 gaan. Deze bijdrage komt aan beide zijden erbij. De discontinuïteit blijft wel dezelfde. Een bronbelegging ter sterkte q levert een discontinuïteit in $\partial\varphi/\partial n$ ter grootte

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^- = q. \quad (8.19)$$

De algemene formule voor $\partial\varphi/\partial n$ t.g.v. een bronbelegging op een contour Γ luidt

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^\pm (\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} \pm \frac{1}{2}q(\mathbf{x}). \quad (8.20)$$

De integraal is analoog aan het eerste stuk van (8.18) en moet als Cauchy hoofdwaaarde worden opgevat.

Bekijk vervolgens de potentiaal van een *dipoolbelegging* op de x -as. Deze luidt

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi.$$

Dit is dezelfde uitdrukking als we bij de $\partial\varphi/\partial n$ van een bronbelegging tegenkwamen. Dus de potentiaal van een dipoolbelegging is discontinu, met sprong M , en hiermee ook de langssnelheid. We zullen niet laten zien dat de normaalsnelheid $\partial\varphi/\partial n$ wel weer continu is. Bovenstaande uitdrukking zijn we al eerder tegengekomen in § 8.2; ga dit verband na!

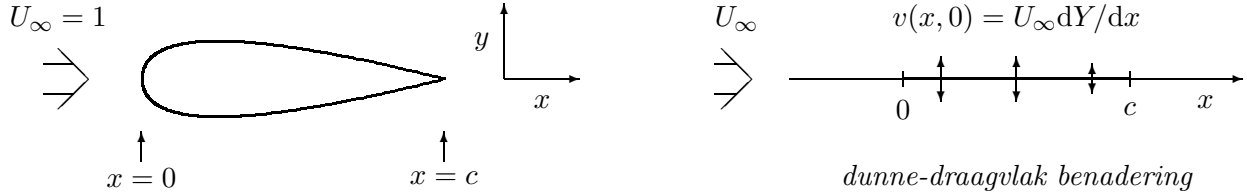
Tenslotte de *wervelbelegging*. We hebben al gezien dat het snelheidsveld van een wervel orthogonaal staat op dat van een bron. Bij een bronbelegging is de normaalsnelheid discontinu \Rightarrow bij een wervelbelegging is de langssnelheid discontinu; zie Opgave 25.

8.4 Stroming rond een vleugelprofiel

Bekijk potentiaalstroming rond een doorsnede van een vliegtuigvleugel. De stroming voldoet aan $\Delta\varphi = 0$, en op het vleugelprofiel moet de normaalsnelheid 0 zijn: $\partial\varphi/\partial n = 0$.

Dunne-draagvlak theorie

We gaan eerst benaderen, en beperken ons tot het symmetrische geval. Stel het profiel is $y = Y(x)$, dan moet op het oppervlak gelden $v/u = dY/dx$. We nemen aan dat de horizontale snelheid niet veel zal afwijken van $u = 1$. Dan komt er $v(x, y)|_{\text{opp}} \approx dY/dx$. Tot slot schrijven we deze v niet voor op het oppervlak, maar op de x -as: ‘dunne-draagvlak’ benadering.



Het op te lossen probleem luidt dan: Vind een oplossing van $\Delta\varphi = 0$ met randvoorwaarde

$$\begin{cases} \partial\varphi/\partial n|_{y=0^+} = dY/dx & \text{op } 0 < x < c, \\ \partial\varphi/\partial n|_{y=0^+} = 0 & \text{op } -\infty < x < 0 \text{ en } c < x < \infty. \end{cases}$$

Voor $x \rightarrow -\infty$ moet verder gelden $\partial\varphi/\partial x \rightarrow U_\infty = 1$.

Aan de onderkant op $y = 0^-$ moet $\partial\varphi/\partial n$ het andere teken hebben (n blijft naar boven wijzen), dus we zien dat $\partial\varphi/\partial n$ discontinu is over de x -as in het interval $0 < x < c$. Het ligt nu voor de hand om φ op te bouwen uit een bronverdeling met sterkte $2 dY/dx$, gesuperponeerd op de uniforme aanstroming $\varphi = x$ (met $u = 1, v = 0$)

$$\varphi(x, y) = x + \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{dY}{dx} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

We herkennen hier de Greense functie van het Neumann probleem op een halfvlak, zoals in § 8.2 gepresenteerd.

De bijbehorende horizontale snelheid volgt uit differentiatie naar x . Op de as $y = 0$ komt er dan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, 0) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{dY/dx}{x - \xi} d\xi, \quad (8.21)$$

waarbij we de integraal als Cauchy hoofdwaaarde moeten opvatten. In het college Grenslaagstromingen wordt deze relatie toegepast.

Opmerking We zien dus dat een Neumann probleem met een bronbelegging kan worden opgelost. Voor een Dirichlet probleem kunnen we een dipoolbelegging of een wervelbelegging te hulp roepen. Onderzoek zelf hoe dit werkt bij het halfvlak probleem (zie Opgave 25).

Volledig profiel

Voor de ‘echte’ situatie hebben we een Neumann probleem op een ingewikkelder buitengebied. We splitsen als net de ongestoorde stroming af (zeg in x -richting)

$$\varphi = U_\infty x + \tilde{\varphi}.$$

Dan volgt voor $\tilde{\varphi}$ een potentiaalprobleem met een inhomogene Neumann randvoorwaarde $\partial\tilde{\varphi}/\partial n = -U_\infty n_x$, waarbij n_x de x -component van de normaal op het profiel is. Verder moet $\tilde{\varphi}$ op het oneindige minder sterk groeien dan de uniforme aanstroming (regulariteit; zie § 7.1).

We zoeken de oplossing weer als een bronbelegging $q(\boldsymbol{\xi})$ op het profiel; noem deze contour C , dus moet gelden

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_C q(\boldsymbol{\xi}) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\partial C.$$

Voor $\partial\tilde{\varphi}/\partial n$ aan de buitenkant geldt (zie (8.20))

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right)^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_C q(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| d\partial C + \frac{1}{2}q(\mathbf{x}). \quad (8.22)$$

De aangegeven integraal is de generalisatie van het stuk $(-\infty, x - \delta] + [x + \delta, \infty)$ uit (8.18) en moet ook als zodanig geïnterpreteerd worden (lim $\delta \rightarrow 0$ nemen = Cauchy hoofdwaarde). Omdat $(\partial\tilde{\varphi}/\partial n)^+ = -U_\infty n_x$ gegeven is, staat hier een integraalvergelijking voor $q(\boldsymbol{\xi})$.

Numeriek wordt de integraalvergelijking opgelost door de singulariteitenbelegging via kleine vlakjes op te bouwen en per vlakje constant/lineair/... te kiezen. In de aerodynamica heet dit een *panelen methode*; deze is eind 50-er jaren geïntroduceerd. Later is herkend dat dit in feite een eindige elementen manier is; vandaar ook de moderne Engelse naam ‘boundary element’ methode. Het rekenrooster, dat dus alleen maar de rand van het stromingsgebied beschrijft, kan er uitzien als hieronder. Zie verder het college Numerieke Methoden voor Integraalvergelijkingen.

Bijlage A

GEREEDSCHAP UIT ANALYSE EN LINEAIRE ALGEBRA

In deze Appendix formuleren we een aantal eigenschappen uit de analyse en de lineaire algebra die we bij de studie van PDV's nodig hebben. Deze eigenschappen zullen meestal zonder bewijs gegeven worden; hiervoor wordt verwezen naar de corresponderende colleges.

A.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

Elke $n \times n$ matrix A heeft n eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wanneer alle λ_i verschillend zijn bestaan er ook n eigenvectoren e_i waarvoor geldt $Ae_i = \lambda_i e_i$. Deze eigenvectoren zijn lineair onafhankelijk. In dit geval heet de matrix A *diagonaliseerbaar*. We kunnen met de eigenvectoren als kolommen een transformatie matrix S definiëren. Er geldt dan

$$A = S\Lambda S^{-1}, \tag{A.1}$$

waarin $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Wanneer er eigenwaarden met meervoudige multiplicititeit bestaan, behoeven er niet voldoende eigenvectoren te zijn; de matrix heet in dit geval *defect*. Hij is nu niet meer diagonaliseerbaar: er ontstaan Jordan blokjes rond de diagonaal van Λ , die corresponderen met de ontbrekende eigenvectoren.

Stelling A.1 Elke symmetrische ($A = A^*$) resp. anti-symmetrische ($A = -A^*$) matrix is diagonaliseerbaar; de eigenwaarden zijn reëel resp. zuiver imaginair.

Stelling A.2 Een matrix A heeft reële eigenwaarden met een volledig stelsel eigenvectoren d.e.s.d. als er een positief definitie matrix H bestaat waarvoor $HA = A^*H$. De matrix H heet 'symmetrizer'.

Definitie A.3 Een matrix heet *stabiel* als voor alle eigenwaarden λ geldt $\text{Re } \lambda < 0$.

Lemma A.4 (*Lyapunov*) Een matrix A is stabiel d.e.s.d. als er een positief definitie matrix H bestaat zodanig dat $HA + A^*H$ negatief definit is.

Gevolg Als het symmetrische deel van de matrix A , dat wil zeggen $A + A^*$, negatief definitief is, dan is A stabiel. Het omgekeerde hoeft niet te gelden.

A.2 Gewone differentiaalvergelijkingen

We gaan enige uitspraken doen over het evolutie probleem (een stelsel gewone D.V.; zie ook het gelijknamige college)

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y \in \mathbb{C}^n, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}; \quad (\text{A.2})$$

waarbij we de matrix A constant veronderstellen.

Eéndimensionaal

We beginnen in één dimensie

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \quad y(t=0) = y_0, \quad (\text{A.3})$$

met als oplossing

$$y = y_0 e^{\lambda t} = y_0 e^{\operatorname{Re} \lambda t} e^{i \operatorname{Im} \lambda t}.$$

Het reële deel van λ bepaalt of y groeit dan wel afneemt

$$|y| = |y_0| e^{\operatorname{Re} \lambda t};$$

het imaginaire deel van λ voegt hier een oscillerend karakter aan toe met frequentie $\operatorname{Im} \lambda$.

Op elk begrens interval $[0, T]$ bestaat er een constante K_T zodat

$$|y| \leq K_T |y_0|, \quad K_T = \max(1, e^{\operatorname{Re} \lambda T});$$

met andere woorden het probleem (A.3) is goed gesteld; zie (5.2).

Let wel, goed-gesteldheid laat toe dat een oplossing groeit voor $t \rightarrow \infty$, maar deze mag niet voor eindige t naar oneindig lopen. Maar soms willen we graag een sterkere eis opleggen aan de oplossing, namelijk dat deze begrensd blijft voor alle t , of zelfs dat deze uitsterft als $t \rightarrow \infty$.

Definitie A.5 Het probleem resp. de oplossing van (A.2) heet *stabiel* als er geldt

$$|y(t)| \leq K,$$

met K onafhankelijk van t .

We kunnen nog onderscheid maken tussen oplossingen die niet uitsterven (neutraal stabiel) en oplossingen die wel uitsterven (sterk stabiel). De naamgeving is op dit punt zeer gevarieerd; ook in dit dictaat zal de naamgeving rommelig zijn - blijf dus letten op de bedoelde definitie.

Stelling A.6 De oplossing van (A.3) is stabiel d.e.s.d. als $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$; de oplossing is sterk stabiel d.e.s.d. als $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

We zien dat stabiliteit van de matrix A (Definitie A.3) overeenkomt met sterke stabiliteit van de oplossing van (A.2).

Meerdimensionaal

In meer dimensies beschouwen we het probleem (A.2), met als formele oplossing

$$y(t) = e^{At}y_0. \quad (\text{A.4})$$

Belangrijk is nu of A een volledig stelsel eigenvectoren heeft, dan wel defect is.

Laten de eigenwaarden van A gegeven zijn door $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Een niet defecte eigenwaarde heeft als fundamentele oplossing

$$e^{\lambda_i t};$$

een wel defecte eigenwaarde λ_i , met multipliciteit p , heeft als fundamentele oplossingen

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{p-1} e^{\lambda_i t}.$$

Wanneer $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ dan sterven alle fundamentele oplossingen uit. Bij $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ blijven ze begrensd in het niet-defecte geval, maar ze groeien (algebraïsch) als de eigenwaarde defect is.

We hebben hiermee aannemelijk gemaakt het volgende Lemma:

Lemma A.7 Laat $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mu = \max_{\lambda} \operatorname{Re} \lambda$, en p de orde van het grootste Jordanblokje behorend bij de eigenwaarden met $\operatorname{Re} \lambda = \mu$. Dan bestaan er positieve constanten K_1 en K_2 zo dat voor voldoende grote t geldt

$$0 < K_1 t^{p-1} e^{\mu t} \leq |e^{At}| \leq K_2 t^{p-1} e^{\mu t}. \quad (\text{A.5})$$

Nauw verwant hiermee geldt:

Stelling A.8 Voor elke $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zijn de volgende beweringen equivalent:

1. Er bestaat een constante K zodat $|e^{At}| \leq K$ voor alle $t > 0$;
2. Alle eigenwaarden λ van A voldoen aan $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Bovendien zijn de eigenwaarden met $\operatorname{Re} \lambda = 0$ niet defect;
3. De oplossing van $\frac{dy}{dt} = Ay$ is stabiel.

Onder de iets zwaardere condities $\lambda(A + A^*) \leq 0$, zie Lemma A.4, kan de afschatting voor e^{At} verscherpt worden, zoals uit de volgende stelling blijkt.

Stelling A.9 Als $\lambda(A + A^*) \leq 0$ dan $|e^{At}| \leq 1$.

Bewijs We herinneren eerst aan de definitie van de matrixnorm $|e^{At}| = \max_x |e^{At}x|/|x|$. Verder merken we op dat de oplossing van de differentiaalvergelijking $dy/dt = Ay$ met als beginwaarde $y(0) = x$ wordt gegeven door $y(t) = y(0)e^{At}$. Daarmee volgt $|e^{At}| = \max_{y(0)} |y(t)|/|y(0)|$. Bekijk nu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|y|^2 &= \frac{d}{dt}\langle y, y \rangle = \left\langle \frac{dy}{dt}, y \right\rangle + \left\langle y, \frac{dy}{dt} \right\rangle \\ &= \langle Ay, y \rangle + \langle y, Ay \rangle = \langle (A + A^*)y, y \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt $|y(t)| \leq |y(0)| \Rightarrow |e^{At}| \leq 1$. □

Gevolg Als A een zuiver imaginaire diagonaalmatrix is, $A = i\Lambda$, dan geldt $|e^{At}| = |e^{i\Lambda t}| = 1$.

Bewijs Stelling A.9 levert een ‘ \leq ’ teken. Het feit dat $|e^{i\lambda t}| = 1$ als λ een reële scalar is doet de rest. \square

A.3 Functieruimten en ongelijkheden

Notatie

De functies $u(x, t)$ waar we in geïnteresseerd zijn in dit college zijn meestal gedefinieerd op $\Omega \times [0, \infty)$, met $\Omega \subset \mathbb{R}^s$. Het zijn n -dimensionale vectorfuncties met complexe functiewaarden $u(x, t) = (u_1, \dots, u_n)(x, t) \in \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$). In de n -dimensionale vectorruimte \mathbb{C}^n definiëren we als gebruikelijk een inproduct en een norm via

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i, \quad |u| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

De bijbehorende matrixnorm is $|A| = \max_u |Au|/|u| = \max_{|u|=1} |Au|$.

Voor de functies $u(\cdot, t)$ gebruiken we een L_2 -inproduct en norm

$$((u, v))(t) = \int_{\Omega} \langle u(x, t), v(x, t) \rangle dx, \quad \|u\| = ((u, u))^{\frac{1}{2}}.$$

Een enkele keer zal ook de L_{∞} -norm voorkomen

$$|u(\cdot, t)|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |u(x, t)|.$$

Op de rand $\partial\Omega$ definiëren we een inproduct volgens

$$((u, v))_{\partial\Omega}(t) = \int_{\partial\Omega} \langle u(x, t), v(x, t) \rangle dx, \quad \|u\|_{\partial\Omega}^2 = ((u, u))_{\partial\Omega}.$$

Als voorbeeld in één dimensie (onafhankelijk van t): $\Omega = [0, 1]$, $\partial\Omega = \{0, 1\}$

$$((u, v))_{\partial\Omega} = \langle u(0), v(0) \rangle + \langle u(1), v(1) \rangle, \quad \|u\|_{\partial\Omega}^2 = |u(0)|^2 + |u(1)|^2.$$

Ongelijkheden

We formuleren hier enkele ongelijkheden die we bij onze afschattingen nodig hebben.

Als eerste Gronwall’s Lemma, dat we kunnen gebruiken als we een afschatting hebben voor de tijdsafgeleide van een functie.

Lemma A.10 (*Gronwall*) Stel $y \in C^1[0, T]$ en $\psi \in C[0, T]$ voldoen voor $0 \leq t \leq T$ aan

$$y'(t) \leq cy(t) + \psi(t)$$

met $c > 0$. Dan geldt

$$y(t) \leq e^{ct} \left\{ y(0) + \int_0^t |\psi(\tau)| d\tau \right\}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (\text{A.6})$$

Bewijs Bekijk $z(t) = e^{-ct}y(t)$, dan geldt

$$z' = -ce^{-ct}y + e^{-ct}y' \leq e^{-ct}\psi \leq |\psi|.$$

Integratie levert

$$z(t) - z(0) \leq \int_0^t |\psi(\tau)| d\tau,$$

hetgeen na terugsubstitutie $y = e^{ct}z$ het gestelde oplevert. \square

Vervolgens formuleren we een ongelijkheid van het type dat naar Sobolev is genoemd. Hierin worden relaties gegeven tussen functiewaarden en ruimtelijke afgeleiden.

Lemma A.11 (*Sobolev*) Stel $w \in C^\infty[0, L]$, dan geldt voor alle $\epsilon > 0$

$$|w|_\infty^2 \leq \epsilon \|w_x\|^2 + c(\epsilon) \|w\|^2. \quad (\text{A.7})$$

Bewijs Omdat $w \in C^\infty$ is er een punt $x_0 \in [0, L]$ waarin $|w(x_0)| = \min_x |w(x)|$, en een punt $x_1 \in [0, L]$ waarin $|w(x_1)| = \max_x |w(x)| = |w|_\infty$. Nu geldt

$$\begin{aligned} |w(x_1)|^2 - |w(x_0)|^2 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \langle w, w \rangle dx = \int_{x_0}^{x_1} (\langle w_x, w \rangle + \langle w, w_x \rangle) dx \\ &\leq 2 \left| \int_{x_0}^{x_1} \langle w, w_x \rangle dx \right| \leq 2 \left\{ \int_{x_0}^{x_1} |w|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} |w_x|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 2 \|w\| \|w_x\|. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} |w|_\infty^2 &= |w(x_1)|^2 \leq 2 \|w\| \|w_x\| + |w(x_0)|^2 \\ &\leq 2 \|w\| \|w_x\| + \frac{1}{L} \|w\|^2 \leq \epsilon \|w_x\|^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{L} \right) \|w\|^2. \end{aligned}$$

\square

Onderweg hebben we gebruikt de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

$$|((u, v))| \leq ((u, u))^{\frac{1}{2}} ((v, v))^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.8})$$

en een Hölder ongelijkheid

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2 \quad (\epsilon > 0). \quad (\text{A.9})$$

Tenslotte formuleren we de ongelijkheid van Poincaré in één dimensie.

Lemma A.12 (*Poincaré*) Stel $u \in C^1[0, L]$ en stel $u(0) = 0$, dan geldt

$$\|u\|^2 \equiv \int_0^L u^2 d\xi \leq L^2 \int_0^L (u')^2 d\xi \equiv L^2 \|u'\|^2. \quad (\text{A.10})$$

Bewijs Schrijf $u(x) = \int_0^x u'(\xi) \, d\xi = \int_0^x 1 \cdot u'(\xi) \, d\xi$.

Er volgt, met onder andere gebruik van Cauchy-Schwarz (A.8),

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left\{ \int_0^x u'(\xi) \, d\xi \right\}^2 \leq \left\{ \int_0^x 1^2 \, d\xi \right\} \left\{ \int_0^x |u'(\xi)|^2 \, d\xi \right\} \\ &\leq L \int_0^x |u'(\xi)|^2 \, d\xi \leq L \int_0^L |u'(\xi)|^2 \, d\xi = L \|u'\|^2. \end{aligned}$$

Integratie hiervan over x van 0 naar L resulteert in

$$\|u\|^2 \equiv \int_0^L u^2(\xi) \, d\xi \leq L^2 \|u'\|^2.$$

□

Bijlage B

VRAAGSTUKKEN

B.1 Opgaven

Hoofdstuk 2

1. Los de volgende beginwaarde problemen op

- (a) $v_y + e^x v_x = 0$, met $v(x, 0) = x$;
- (b) $v_y + cv_x + v^2 = 0$, met $v(x, 0) = x$;
- (c) $v_y + cv_x + \lambda v = 0$, met $v(x, 0) = f(x)$;
- (d) $v_y + (1 + x^2)v_x = v$, met $v(x, 0) = \arctan x$.

2. Toon aan dat het beginwaarde probleem

$$v_y + v_x = 0, \quad \text{met } v = x \quad \text{op } x^2 + y^2 = 1,$$

geen oplossing heeft. Echter, wanneer de beginwaarden alleen gegeven worden op de helft van de cirkel die in het halfvlak $x + y \leq 0$ ligt, dan bestaat de oplossing wel. Bepaal deze.

3. Los op het beginwaarde probleem

$$u_t + u_x = x, \quad \text{met } u(x, 0) = f(x).$$

Toon vervolgens aan dat het verwante probleem

$$u_t + u_x = x, \quad \text{met } u(x, x) = 1$$

geen oplossing heeft. Onder welke beginvoorwaarde op de kromme $t = x$ is wel een oplossing mogelijk?

4. Bepaal de karakteristieken van de differentiaalvergelijking

$$\varphi_{xy} = 0.$$

Wat zijn de bijbehorende karakteristieke variabelen? Op $y = 0$ willen we $\varphi_y(x, 0) = f(x)$ voorschrijven; is dat toegestaan?

5. Bekijk de vergelijking

$$u_x + u_y - cu = 0,$$

met $c = \text{Constant}$. Laat een (ξ, η) -coördinatensysteem gegeven zijn door $\xi = y - x$ en $\eta = y + x$; dus de karakteristieken zijn $\xi = \text{Constant}$. Onderzoek de mogelijkheid dat u_ξ discontinu is over een karakteristiek. Aan welke vergelijking voldoet de sprong $[u_\xi]$? De gevonden vergelijking beschrijft dus het verloop van de sprong langs de karakteristiek.

Hoofdstuk 3

6. Bepaal met de karakteristieken methode de oplossing van het volgende beginwaarde probleem voor een oneindig dunne snaar:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{xx} = 0, \tag{B.1}$$

met beginvoorwaarden

$$\varphi(x, 0) = f(x), \quad \varphi_t(x, 0) = g(x).$$

7. Bekijk de differentiaalvergelijking

$$u_{tt} - xu_{xx} = 0.$$

Deze vergelijking stelt voor een vertikaal opgehangen snaar. Benoem het type van deze vergelijking. In het hyperbolische geval, bepaal de karakteristieken. Noem deze $\xi = \text{Constant}$ en $\eta = \text{Constant}$ en transformeer de vergelijking naar (ξ, η) coördinaten.

Hoofdstuk 4

8. Een longitudinale golf $\varphi(x, t) = f(x + at)$ ($a > 0$) plant zich naar links voort in een halfoneindige staaf $x \geq 0$. Op $t = 0$ gelden derhalve de begincondities $\varphi(x, 0) = f(x)$ en $\varphi_t(x, 0) = af(x)$. De bewegingsvergelijking van de golf wordt gegeven door (B.1). Bepaal de evolutie van de golf voor de volgende drie gevallen:

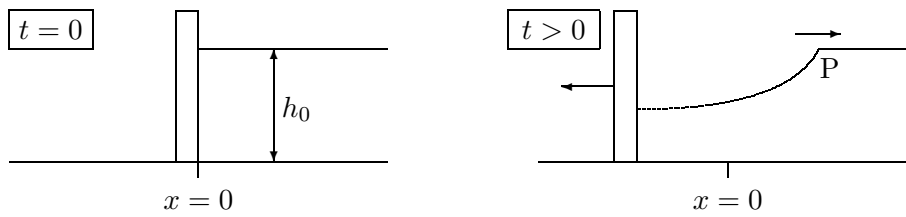
- (a) De staaf is in het uiteinde $x = 0$ ingeklemd, d.w.z. $\varphi(0, t) = 0$.
- (b) De staaf is in het uiteinde vrij, d.w.z. $\varphi_x(0, t) = 0$.
- (c) De uitwijking in het uiteinde wordt voorgeschreven, d.w.z. $\varphi(0, t) = h(t)$.

9. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} u_t - v_x &= 0, \\ v_t - c^2(u)u_x &= 0. \end{aligned}$$

Welke karakteristieken bezit dit stelsel, en wat zijn de bijbehorende Riemann invarianten?

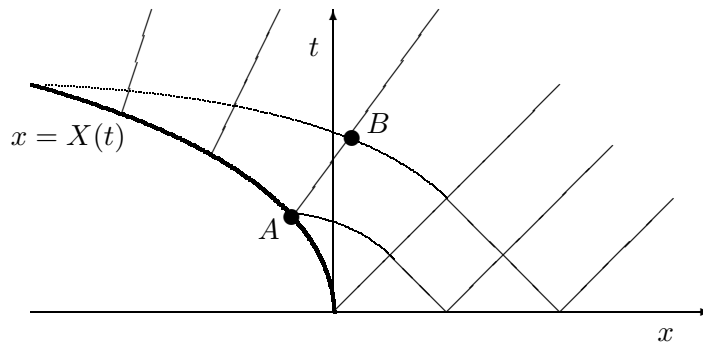
10. Een plank houdt een hoeveelheid water tegen. Tot $t = 0$ is het water in rust, met diepte h_0 (zie linker figuur). Op $t = 0$ bewegen we de plank naar links. De positie van de plank wordt gegeven door $x = X(t)$; de snelheid is $\dot{X}(t) < 0$ met $\ddot{X} \leq 0$. Het water gaat zakken en een verlagingsgolf beweegt zich naar rechts (punt P in rechter figuur).



De beweging van het water beschrijven we door de ondiep-water vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Wat zijn de karakteristieken van dit stelsel, en welke Riemann invarianten horen hierbij?
- (b) Hoe groot zijn φ_+ en φ_- op de karakteristieken die vanaf de positieve x -as lopen? Bepaal de hoogte van het water ter plekke van de plank (neem aan $\dot{X} > -2\sqrt{gh_0}$). Wat gebeurt er als $\dot{X} \leq -2\sqrt{gh_0}$?



- (c) Bepaal de helling van de karakteristieken ter plekke van de plank, i.e. op $x = X(t)$. Wat is de waarde van φ_+ op de karakteristieken die vanaf de plankbaan beginnen.
 - (d) Druk de oplossing in een punt B uit in de oplossing in het punt A en de overige gegeven parameters. Wat is de helling van de karakteristieken in het punt B ? Toon aan dat de φ_+ -karakteristieken rechte lijnen zijn.
 - (e) Met welke snelheid beweegt het punt P naar rechts? Wat is de watersnelheid in het punt P ?
 - (f) Waarom zou hierboven de aanname $\ddot{X} \leq 0$ gemaakt zijn?
11. Als speciaal geval van de vorige opgave laten we de plank meteen op snelheid komen, dat wil zeggen $x = -Vt$ ($V > 0$).
- (a) Hoe ziet het karakteristiekenplaatje er nu uit?
 - (b) Bepaal op de karakteristieken $x = \alpha t$ uit de verdunningswaaier de oplossing. (Hint: bepaal φ_- en gebruik dat de helling van de karakteristieken bekend is.) Wat is de helling van de φ_- -karakteristieken in een punt uit de verdunningswaaier.

- (c) Wat is de oplossing buiten de verdunningswaaier? Maak een plaatje van \sqrt{gh} als functie van x voor vaste t .

12. Beschouw de oplossing van de niet-viskeuze Burgers vergelijking

$$u_t + uu_x = 0,$$

met beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = 2 \text{ voor } x < 0; \quad u(x, 0) = 1 \text{ voor } 0 < x < 1; \quad u(x, 0) = 0 \text{ voor } x > 1.$$

Toon aan dat de schok die in $x = 0$ begint de schok vanuit $x = 1$ inhaalt op $t = 1$. Hierna ontstaat een nieuwe schok; bepaal deze.

13. Bekijk een vleugelprofiel in compressibele potentiaal stroming. Een benaderende versie van de bewegingsvergelijking is

$$(1 - M_\infty^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \tag{B.2}$$

waarin M_∞ het Mach getal van de aankomende stroming is. (Het getal van Mach geeft de verhouding weer tussen de snelheid van de stroming u en de geluidssnelheid c : $M = u/c$.)

De randvoorwaarden worden gegeven door

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, 0) = V(x) \text{ voor } x \in [a, b] \text{ en } \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, 0) = 0 \text{ daarbuiten,}$$

en bovendien geldt $\partial\Phi/\partial r \rightarrow 0$ als $r \rightarrow \infty$.

- (a) Wat is het karakter van deze vergelijking? Welke randvoorwaarden zijn vereist bij in- en uitstroming als $M_\infty < 1$ en als $M_\infty > 1$?
- (b) Bekijk nu dit probleem voor $M_\infty > 1$ (supersone stroming). Wat zijn de karakteristieken en de bijbehorende karakteristieke variabelen?
- (c) Beschouw de x -richting als de tijd-achtige richting. Leg de beginvoorwaarden op $x = \text{Constant}$ ($x = -\infty$ bijv.)

$$u = U_\infty, \quad v = 0 \quad \text{als } x \rightarrow -\infty.$$

In het bovenhalfvlak $y > 0$ hebben we nu een begin/randvoorwaarde probleem met randvoorwaarden op $y = 0$ waar v gegeven is. Bepaal de oplossing van dit probleem.

Hoofdstuk 5

14. Beschouw de telegraaf vergelijking

$$u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} + 2\mu u_t = 0 \quad (\mu > 0).$$

Hoe evolueert een Fourier component? Wat wordt, bij deze 2^e orde vergelijking in t , het Fourier symbool?

15. Los het volgende inhomogene beginwaarde probleem op

$$v_t + cv_x = F(x, t), \quad \text{met } v(x, 0) = f(x).$$

16. Beschouw de potentiaalvergelijking

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{op} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{en} \quad y \geq 0.$$

Neem als randvoorwaarden

$$\varphi(x, 0) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{n} \sin nx.$$

- (a) Bepaal de bijbehorende oplossing (gebruik separatie van variabelen); noem deze φ_n .
 (b) Laat $n \rightarrow \infty$ gaan. Wat is de oplossing van het 'limiet' probleem met als randvoorwaarden $\varphi(x, 0) = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = 0$. Nadert φ_n naar deze oplossing? Breng dit in verband met het slecht-gesteld zijn van het probleem.
17. Beschouw de golfvergelijking

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{op het gebied} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

De randvoorwaarden hiervoor kiezen we 'rondom'

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, T) = 0.$$

Laat zien dat voor irrationale waarden van T de oplossing eenduidig is ($u \equiv 0$), maar dat voor rationale waarden van T er oneindig veel oplossingen zijn (gebruik separatie van variabelen). Breng dit in verband met het slecht-gesteld zijn van bovenstaand probleem.

18. Beschouw de vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u \in \mathbb{C}^n, \quad \Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

- (a) Laat allereerst Λ een diagonaalmatrix zijn met reële coëfficiënten. Toon aan dat het Cauchy probleem voor deze vergelijking goed gesteld is.
 (b) Generaliseer nu waarbij we van Λ alleen weten dat deze reële eigenwaarden heeft. Hoe staat het in dit geval met de goed-gesteldheid van bovenstaand probleem?
 (c) En als Λ ook complexe eigenwaarden heeft?
19. Beschouw het stelsel met variabele coëfficiënten.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = iU^*(x) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} U(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u \in \mathbb{C}^2 \tag{B.3}$$

met

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \gamma, \beta \neq 0$$

- (a) Laat zien dat het Cauchy probleem voor het stelsel met bevroren coëfficiënten

$$\frac{\partial v}{\partial t} = iU^*(x_0) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} U(x_0) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{B.4})$$

goed gesteld is.

Hint: Omdat $\alpha \neq \gamma$ is de matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ diagonaliseerbaar; zeg met de matrix S .

Voer in $w = S^{-1}U(x_0)v$ en de vergelijking (B.4) gaat over in

$$\frac{\partial w}{\partial t} = i\Lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

- (b) Laat zien dat het Cauchy probleem voor het originele stelsel (B.3) slecht gesteld is.

Hint: Substitueer $v(x, t) = U(x)u(x, t)$ dan gaat (B.3) over in

$$v_t = Uu_t = i \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} v_{xx} + 2 \begin{pmatrix} i\beta & -i\alpha \\ i\gamma & 0 \end{pmatrix} v_x - i \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} v.$$

Dit stelsel heeft constante coëfficiënten. De eigenwaarden k van $P(i\omega)$ voldoen aan

$$\begin{vmatrix} -i\alpha\omega^2 - 2\beta\omega - i\alpha - k & -i\omega^2\beta + 2\alpha\omega - i\beta \\ -2\gamma\omega & -i\gamma\omega^2 - i\gamma - k \end{vmatrix} = 0$$

zodat

$$\operatorname{Re}(k_1 + k_2) = -2\beta\omega.$$

Als $\beta \neq 0$ moet minstens één der eigenwaarden een reëel deel hebben dat aangroeit met $|\omega|$.

Opmerking: (B.3) is een variabele coëfficiënten probleem waarvoor *alle* constante coëfficiënten versies goed gesteld zijn, maar toch is (B.3) zelf niet goed gesteld.

Hoofdstuk 6

20. Beschouw de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$

met gegeven beginvoorwaarde op $t = 0$ en periodieke randvoorwaarden op $x = 0$ en $x = 1$. Verder is gegeven dat A symmetrisch is met $\lambda(A) > 0$. Toon met behulp van de energiemethode aan dat dit probleem goed gesteld is.

Hoofdstuk 7

21. Bekijk in een gebied
- $\Omega \in \mathbb{R}^s$
- de differentiaal operator

$$Lu = -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + qu, \quad p(\mathbf{x}) > 0, \quad q(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (\text{B.5})$$

Laat deze werken op functies die op de rand $\partial\Omega$ voldoen aan

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0). \quad (\text{B.6})$$

- (a) Bewijs dat, onder de voorwaarde (B.6), de operator
- L
- positief is, dat wil zeggen

$$\int_{\Omega} uLu \, d\Omega > 0 \text{ als } u \neq 0.$$

- (b) Bewijs dat, onder de voorwaarde (B.6), de operator
- L
- zelf-geadjungeerd is, dat wil zeggen

$$\int_{\Omega} uLw \, d\Omega - \int_{\Omega} wLu \, d\Omega = 0$$

als u en w aan (B.6) voldoen.

- (c) Wanneer we willen oplossen, voor het geval
- $q \equiv 0$
- ,

$$Lu = f \text{ in } \Omega$$

met randvoorwaarde

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ op } \partial\Omega,$$

aan welke compatibiliteitsvoorwaarde moeten f en g dan voldoen?

Hoofdstuk 8

22. Bekijk nogmaals het probleem (zie Opgave 21)

$$Lu = -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) = 0, \quad p(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

met randvoorwaarden

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = h \text{ op } \partial\Omega.$$

Aan welke randvoorwaarde moet de Greense functie voor dit probleem voldoen? Dat wil zeggen hoe moet G gekozen worden op de rand $\partial\Omega$ opdat geldt

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} \frac{ph}{\beta} G \, d\partial\Omega.$$

23. Beschouw een vleugelprofiel (symmetrisch) in een uniforme stroming (snelheid
- U_{∞}
-) zonder invalshoek. Neem aan dat de stroming incompressibel is met snelheidspotentiaal
- Φ
- . De snelheidscomponenten zijn dan
- $u = \partial\Phi/\partial x$
- en
- $v = \partial\Phi/\partial y$
- . Op het profiel benaderen we de randvoorwaarde dat de normaalsnelheid 0 moet zijn als volgt. Er moet gelden
- $v/u = dY/dx$
- als
- $y = Y(x)$
- de coördinaat van het profiel geeft. We benaderen
- $u = U_{\infty}$
- , en leggen de randvoorwaarde

$$v = U_{\infty} \frac{dY}{dx}$$

op, op de koorde $x \in [a, b]$.

- (a) Wat is de potentiaal
- Φ
- waarvoor geldt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, 0) = V(x) \text{ voor } x \in [a, b] \text{ en } \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, 0) = 0 \text{ daarbuiten,} \quad (\text{B.7})$$

waarvoor bovendien $\partial\Phi/\partial r \rightarrow 0$ als $r \rightarrow \infty$. Wat is de horizontale snelheid die bij deze potentiaal hoort? Welke waarde neemt u aan op de x -as?

- (b) Welke potentiaal moet bij het antwoord onder (a) opgeteld opdat voor $x \rightarrow \infty$ de $u \rightarrow U_\infty$? Ga na dat de som voor beide potentialen nog steeds voldoet aan de randvoorwaarde (B.7). Wat wordt uiteindelijk de horizontale snelheid op de x -as?

24. Bekijk nogmaals het vleugelprofiel in compressibele potentiaal stroming uit Opgave 13

$$(1 - M_\infty^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Los ditmaal de vergelijking met bijbehorende randvoorwaarden op voor $M_\infty < 1$ (subsone stroming). M.a.w. bepaal de snelheidspotentiaal Φ die voldoet aan:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, 0) = V \text{ als } x \in [a, b], \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, 0) = 0 \text{ daarbuiten,}$$

en

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \rightarrow U_\infty \text{ als } x \rightarrow -\infty.$$

Hint: Transformeer de y -richting volgens $y = \eta/\sqrt{1 - M_\infty^2}$, dan voldoet Φ aan $\Phi_{xx} + \Phi_{\eta\eta} = 0$. Transformeer ook de randvoorwaarden en pas het resultaat van Opgave 23 toe.

25. In deze opgave gaan we de potentiaal t.g.v. een wervelbelegging bestuderen.

- (a) Toon allereerst aan dat de potentiaal $\varphi(x, y)$ van een wervel in het punt (ξ, η) ter sterkte Γ wordt gegeven door

$$\varphi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y - \eta}{x - \xi}.$$

- (b) Bepaal vervolgens de potentiaal van een wervelbelegging langs de x -as met sterkte γ .
 (c) Toon aan dat de langssnelheid $\partial\varphi/\partial x$ wordt gegeven door

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

- (d) Bewijs dat de sprong over de x -as in de langssnelheid wordt gegeven door

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^- = \gamma(x).$$

- (e) Bepaal nu met bovenstaande informatie de oplossing van de Laplace vergelijking die voldoet aan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, 0) = U(x).$$

B.2 Antwoorden

1. (a) Langs een karakteristiek geldt $dy/ds = 1$, $dx/ds = e^x$ en $dv/ds = 0$. Voor de karakteristiek die, voor $s = 0$, de x -as snijdt in x_0 geldt daarmee de parametervoorstelling $e^{-x} = -s + e^{-x_0}$, $y = s$, $v = x_0$. Door hieruit s en x_0 te elimineren volgt

$$v(x, y) = -\ln(y + e^{-x})$$

- (b) $v(x, y) = \frac{x - cy}{1 + y(x - cy)}$
 (c) $v(x, y) = F(x - cy) e^{-\lambda y}$
 (d) $v(x, y) = (\arctan x - y) e^y$

2. De oplossing luidt

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(x - y) - \frac{1}{2}\sqrt{2 - (x - y)^2}.$$

We merken op dat deze oplossing niet differentieerbaar is in de uiteinden van de halve cirkel, waar deze raakt aan de karakteristieken van de vergelijking.

3. Oplossing bij $u(x, 0) = f(x)$ luidt $u(x, t) = xt - \frac{1}{2}t^2 + f(x - t)$. Beginwaarde op $t = x$ moet voldoen aan $u = \frac{1}{2}x^2 + \text{Constante}$.
4. Vorm de vergelijking om naar een eerste orde stelsel, zoals in §1.3. De karakteristieken hiervan zijn $x = \text{constant}$ en $y = \text{constant}$, met karakteristieke variabelen φ_x en φ_y , resp. Omdat $x = 0$ een karakteristiek is, mogen we niet de bijbehorende variabele φ_x voorschrijven, tenzij we aan een compatibiliteitsvoorwaarde voldoen (in dit geval $f_x = 0$).
5. $2[u_\xi]_\eta = c[u_\xi]$
6. De oplossing is genoemd naar d'Alembert

$$\varphi(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{G(x + at) - G(x - at)}{2a},$$

waarin $G(\xi) = \int^\xi g(\lambda) d\lambda$. Merk op dat de tweede term hiermee geschreven kan worden als $\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi$. We zien hieraan dat de oplossing alleen afhangt van de beginwaarden op het interval $[x - at, x + at]$.

7. De vergelijking is hyperbolisch voor $x > 0$, parabolisch voor $x = 0$ en elliptisch voor $x < 0$. De karakteristieken zijn $\xi \equiv t + 2\sqrt{x} = \text{constant}$ en $\eta \equiv t - 2\sqrt{x} = \text{constant}$. Na transformatie wordt de vergelijking $2u_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi-\eta}(u_\xi - u_\eta) = 0$.
8. In alle drie gevallen geldt $\varphi(x, t) = f(x + at)$ voor $t < x/a$. Voor $t > x/a$ geldt:
- (a) $\varphi(x, t) = f(x + at) - f(at - x)$
 (b) $\varphi(x, t) = f(x + at) + f(at - x)$
 (c) $\varphi(x, t) = h(t - x/a) + f(x + at) - f(at - x)$
9. Riemann invarianten

$$\int^u c(u) du \pm v \quad \text{langs} \quad x \pm ct = \text{Constant}$$

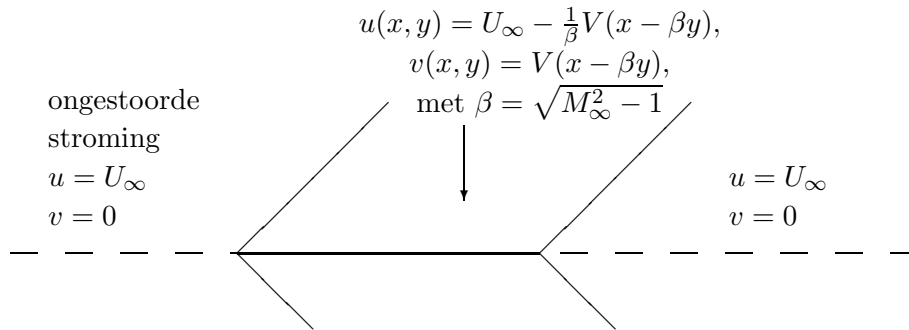
10. (a) De helling van de karakteristieken wordt gegeven door $dx/dt = u \pm \sqrt{gh}$ met bijbehorende Riemann invarianten $\varphi_\pm = u \pm 2\sqrt{gh}$.
- (b) Langs de φ_- -karakteristiek geldt $\varphi_- = -2\sqrt{gh_0}$. De hoogte ter plekke van de plank voldoet hiermee aan $\sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} + \frac{1}{2}\dot{X}$.
- (c) $\frac{3}{2}\dot{X} + \sqrt{gh_0}$, $\frac{1}{2}\dot{X} - \sqrt{gh_0}$; $\varphi_+ = 2\dot{X} + 2\sqrt{gh_0}$

- (d) De oplossing in het punt B luidt $u_B = \dot{X}_A$, $\sqrt{gh_B} = \sqrt{gh_0} + \frac{1}{2}\dot{X}_A$;
de helling van de φ_+ -karakteristiek is $\frac{3}{2}\dot{X}_A + \sqrt{gh_0}$.
- (e) Het punt P verplaatst zich naar rechts met snelheid $\sqrt{2gh_0}$. De watersnelheid is in dit punt $u = 0$.

11. (a) $x = \alpha t$ met $\sqrt{gh_0} - \frac{3}{2}V < \alpha < \sqrt{gh_0}$
 (b) $u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} - \sqrt{gh_0} \right)$, $\sqrt{gh} = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{t} + 2\sqrt{gh_0} \right)$;
 helling φ_- karakteristiek $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{t} - 4\sqrt{gh_0} \right)$.
 (c) rechts van de expansiewaaier geldt $h = h_0$ en $u = 0$; links hiervan geldt $u = -V$ en $\sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} - \frac{1}{2}V$. In de waaier geldt de oplossing uit (b).

Opmerking: We hebben aangenomen dat $V < 2\sqrt{gh_0}$. Wat gebeurt als V groter is?

12. Snelheid van de schok vanuit $x = 0$ is $S = 3/2$; de schok vanuit $x = 1$ heeft snelheid $S = 1/2$. Ze vloeien samen op $x = 3/2$, $t = 1$. De gecombineerde schok heeft snelheid $S = 1$.
13. (a) elliptisch als $M_\infty < 1$, en hyperbolisch als $M_\infty > 1$.
 (b) $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ met $\varphi_\pm = u \sqrt{M_\infty^2 - 1} \mp v$
 (c)



14. Door om te schrijven naar een eerste-orde stelsel ontstaat een 2×2 -matrix als Fouriersymbool, met twee eigenwaarden $\lambda(\omega) = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \gamma^2\omega^2}$. De evolutie van een Fouriercomponent wordt $e^{\lambda t + i\omega x}$.
15. De oplossing kan bepaald worden met het Principe van Duhamel

$$v(x, t) = \int_0^t F(c\tau + x - ct, \tau) d\tau + f(x - ct)$$

16. (a) $\varphi_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sinh ny \sin nx$
 (b) We zien dat voor $y \rightarrow \infty$ deze oplossing willekeurig veel afwijkt van de nul-oplossing van het ‘naburige’ probleem met homogene beginwaarden.
17. De randvoorwaarden op $t = 0$, $x = 0$ en $x = 1$ laten een oplossing van de vorm $\varphi(x, t) = \sin n\pi x \sin n\pi t$ toe met n geheel. Opdat ook de randvoorwaarde op $t = T$ wordt vervuld moet $\sin n\pi T = 0$ zijn. Wanneer T irrationaal is lukt dit alleen voor $n = 0$. Is T rationaal ($T = p/q$, p en q geheel) dan lukt dit voor $n = kq$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

18. (a) Het Fouriersymbool wordt gegeven door $P(i\omega) = -i\Lambda\omega^2$. Omdat Λ een diagonaal matrix is geldt $|e^{P(i\omega)t}| = 1$.
- (b) Hint: Maak onderscheid Λ al of niet defect.
19. –
20. Merk op dat bij afwezigheid van lagere orde termen de eigenwaarden van A wel willekeurig dicht bij 0 mogen komen (vergelijk § 6.2).
21. (a,b) Hint: $\operatorname{div}(wp \operatorname{grad} u) = w \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + (p \operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} w)$; idem met u en w verwisseld. Op deze manier is te verkrijgen

$$\int_{\Omega} uLu \, d\Omega = \int_{\Omega} \{p(\operatorname{grad} u)^2 + qu^2\} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} pu \frac{\partial u}{\partial n} \, d\partial\Omega;$$

$$\int_{\Omega} (wLu - uLw) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} p \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\partial\Omega. \quad (\text{B.8})$$

Uit de randvoorwaarde volgt

$$0 = w(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}) - u(\alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial n}) = \beta(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n}).$$

$$(c) \int_{\Omega} f \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega} pg \, d\partial\Omega$$

22. $\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} = 0$ op $\partial\Omega$.

Hint: In (B.8) met $w = G$ kan $\frac{\partial G}{\partial n}$ worden uitgedrukt in G met behulp van de gevraagde randvoorwaarde.

23. (a) $\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b V(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \, d\xi$

$$(b) u(x, 0) = U_{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{V(\xi)}{x - \xi} \, d\xi$$

24. Opmerking: De supersone versie van (B.2) kunnen we oplossen met een eenvoudige uitdrukking (zie Opgave 13). In deze gelineariseerde theorie is de oplossing alleen tussen de twee Mach kegels vanaf voorrand en achterrand ongelijk aan de ongestoorde stroming. Voor de subsone versie krijgen we een gecompliceerder antwoord; bovendien is in deze versie de oplossing overal ongelijk aan de ongestoorde stroming.

25. –