



Verkeersdoorstroming

J.H.C. Klaassens



Bachelorscriptie Technische Wiskunde

Begeleider(s): A.E.P. Veldman

Juli 2008

Verkeersdoorstroming

J.H.C. Klaassens

Begeleider(s):
A.E.P. Veldman
Instituut voor Wiskunde en Informatica
Postbus 407
9700 AK Groningen

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Literatuurstudie	3
3	Een continu model	7
3.1	Verkeersstroom (q) en verkeersdichtheid (ρ)	7
3.2	De relatie tussen q , u en ρ	8
3.3	Afleiding behoudswet	8
3.4	Het snelheidsveld $u(x, t)$	9
3.5	Optimaal gebruik maken van een weg	9
3.6	Bepalen verkeersdichtheid op latere tijdstippen, bijna uniform	10
3.6.1	Oplossen van gelineariseerde p.d.v.	11
3.7	De verkeersdichtheid-verkeersdoorstromings relatie	12
3.8	Bepalen verkeersdichtheid op latere tijdstippen, niet uniform	12
3.9	Opstopping in zicht	13
3.10	Discontinue golven	15
4	Een discreet model	17
4.1	Het <i>car-following model</i>	17
4.2	Optimal velocity	20
4.3	<i>Multiple velocity difference model</i>	21
4.4	Lineaire stabiliteitsanalyse	24
4.5	Gevolgen stabiliteitsanalyse	28
4.6	Analyse van de neutrale stabiliteitskrommen in de figuur	30
5	Conclusies	35

Hoofdstuk 1

Inleiding

In ons drukke bestaan, waar vooral hard werken centraal staat, wordt het afleggen van afstanden in een zo kort mogelijke tijd steeds belangrijker. Wie vroeger in de Ommelanden woonde was een dag aan reistijd kwijt om in de Stad te komen. Vandaag de dag reizen mensen zelfs heen en weer op één dag. In de Stad werken en 's avonds heerlijk thuis op de bank in je rustige dorp. Tot zover klinkt dit allemaal erg mooi maar... De wegen worden steeds drukker en deze drukte zorgt ervoor dat er tijdens de spits files ontstaan waardoor de reistijd een steeds groter deel van de dag zal gaan innemen. In de meeste gevallen is het duidelijk waardoor zo'n file wordt veroorzaakt. Ongelukken, een brug die open staat, een wegversmalling en door verkeerslichten. Maar hoe vaak heb je wel niet een situatie meegemaakt waarin er eigenlijk niets aan de hand is en je toch tot een bepaald punt stilstaat en daarna zonder enige aanleiding weer vrijuit kan rijden? Hoe kan dit?

Er is geschat dat de hele mensheid meer dan 10 miljoen mensen-jaren besteedt aan het autorijden ieder jaar weer. Met de auto kun je wanneer en waar je maar wilt “vrij” bewegen. De mobiliteit van de auto wordt dan ook niet geëvenaard door welke andere vorm van transport (voor de gewone burger) dan ook. En toch snappen we nog weinig van wat er allemaal komt kijken bij het autorijden. Dat terwijl autorijden na lopen, praten, eten en drinken de meest verspreide vaardigheid is in de wereld en waarschijnlijk ook de meest uitdagende. (zie bron [9])

Kunnen we voorkomen danwel de kans aanzienlijk verminderen dat er files ontstaan? En hoe zorgen we er dus voor dat iedereen lekker kan doorrijden en op tijd voor het eten thuis kan zijn? Is er een systeem waarmee we de mens kunnen helpen bij het voorkomen van files? En zo ja, hoe werkt dat dan? In mijn scriptie zal ik een mathematisch model maken om zodanig een antwoord op deze vragen te geven..

Allereerst zal ik dit gaan doen door het verkeer te beschouwen als een continue stroming. Later blijkt dat hiermee niet voldoende nauwkeurig naar het fileprobleem gekeken kan worden en dus zal ik vervolgens elke auto apart gaan beschouwen.

Hoofdstuk 2

Literatuurstudie

Om verkeerssituaties goed te kunnen bestuderen is het handig om er een wiskundig model van te maken. Zo'n model probeert zo goed mogelijk de situatie te beschrijven zodat de uitkomsten gebruikt kunnen worden in de echte wereld. Verkeersproblemen die op zo'n manier behandeld kunnen worden zijn: waar is het handig om verkeerslichten te installeren; hoe lang moeten deze op groen dan wel rood staan; hoe vergroot je de capaciteit van de weg; wanneer moet je op een weg éénrichtingsverkeer invoeren. Ook als er een nieuwe snelweg gemaakt wordt komen er gelijk vragen naar boven: waar moeten de opritten/afritten komen; en hoeveel banen moeten er komen om de verkeersdrukke aan te kunnen?

Hiervoor moeten we dus op een bepaalde manier naar het verkeer kijken. Over het algemeen zijn er drie manieren om naar het verkeer te kijken in wiskundige zin. Dit zijn:

1. Op microscopische schaal: elke auto wordt apart beschouwd, dus elke auto heeft een eigen bewegingsvergelijking. Dit is meestal een gewone differentiaal vergelijking. (zie ook bron [9])
2. Op macroscopische schaal: nu wordt het gehele verkeer als een stroming beschouwd met een bepaalde dichtheid en snelheid. Door nu een behoudswet op te stellen (wordt een partiële differentiaal vergelijking) kunnen we rekenen aan deze stroming. (zie bron [1])
3. De derde manier beschouwt de kans dat een auto op een bepaalde plek en tijd met een bepaalde snelheid rijdt. Hierbij wordt dus statistische mechanica toegepast zoals de Boltzmann vergelijkingen.

(voor een globaal overzicht van de bovenste twee modelsoorten zie bron [8]).

Dit is ook weer op te delen in aan de ene kant de continue modellen en aan de andere kant de discrete modellen. Een continu model is zeer geschikt om het verkeer als stroming te beschrijven. Dit kan bijvoorbeeld door de snelheid afhankelijk te laten zijn van de dichtheid van het verkeer op een bepaalde plek. Je maakt dan de aanname dat je langzamer gaat rijden naarmate het drukker wordt. In een discreet model beschouw je de auto's ieder apart. De ene bestuurder is de andere niet en ze zullen dus ook niet allemaal op dezelfde manier handelen. Omdat we niet de rijstijl van iedereen kunnen bestuderen moeten we wel een algemeen gedragspatroon voor iedere bestuurder opstellen. Dit kan bijvoorbeeld aan de hand van het snelheidsverschil met zijn voorganger. Loopt de voorganger op de bestuurder uit dan zal de achtervolgende auto versnellen. Andersom moet de bestuurder remmen (vertragen) want

anders zal hij op z'n voorganger botsen. Dit kan nog uitgebreid worden door een bepaalde gevoeligheidsfactor mee te nemen in het model. Je moet namelijk harder remmen als je dichterbij je voorganger zit en je kunt wat rustiger remmen als je keurig twee seconden afstand houdt. (zie bron [1]) Als mens kunnen we hooguit een paar auto's voor ons in de gaten houden. Als de auto's voor ons vertragen reageren wij daar adequaat op. Maar met behulp van een *Intelligent Transportation System (ITS)* (bron: [2]) kan een computer in de auto meerdere auto's in de gaten houden, zowel voor als achter deze auto. Het voordeel hiervan is dat verkeersdoorstroming aanzienlijk hoger blijft. Dit omdat een computer gelinkt aan een auto veel fijner kan reageren dan een mens, waardoor het verkeer vloeiender door kan blijven stromen. Blijft de vraag: hoeveel stabiel kan zo'n systeem de verkeersdoorstroming maken?

Vandaag de dag is er echter nog geen goede algemene theorie waarmee we het verkeer goed kunnen beschrijven aan de hand van stromingscondities. Overheidsinstellingen maken dan ook gebruik van een combinatie van de drie hierboven genoemde modellen. In grote lijnen gaat dit als volgt in z'n werk. Eerst worden de begin- en eindpunten van het wegverkeer geschat, deze worden in het verkeersmodel gestopt. Vervolgens wordt dit steeds weer aangepast door te kijken naar de verkeersstroming in het echt. Met zo'n model is het mogelijk om een verkeersverwachting te maken. Hierin zal een bestuurder van een voertuig kunnen horen hoe lang het voor hem of haar duurt om van A naar B te komen. Naast dat de studie naar verkeersdoorstroming handig is om te zien wat er gebeurt in bepaalde situaties, is het hoofddoel van de studie om het aantal files te beperken tot een minimum. De studie is er ook op gericht om zo optimaal mogelijk gebruik te maken van het wegennet. Het milieu krijgt de laatste jaren meer en meer aandacht en dat vindt ook zijn weg in deze studie. Door de doorstroming te optimaliseren (en dus minder stil te staan) zal het brandstofverbruik immers afnemen.

In bron [1] wordt door Richard Haberman een mooi verhaal gehouden over Traffic Flow. Hij begint bij het begin en het is goed leesbaar. Hij stelt eerst een continu model op aan de hand van drie grootheden, te weten: snelheid, verkeersdichtheid en verkeersdoorstroming. Daarvoor wordt gekeken naar een snelheidsveld en wordt er besproken hoe je het beste de drie genoemde grootheden kan meten. Hij lijdt vervolgens een behoudswet af door aan te nemen dat er geen auto's verdwijnen en spontaan bijkomen tussen twee punten op een weg. Hieruit komt een partiele differentiaalvergelijking voort. Door het een en andere aan te nemen wordt het snelheidsveld alleen afhankelijk van de plaatselijke verkeersdichtheid. De drie grootheden worden ook door een formule met elkaar verbonden zodat de partiele differentiaalvergelijking alleen maar naar de dichtheid opgelost hoeft te worden. Er wordt ook een discreet model opgesteld een zogenaamd *car-following* model. Dit model legt een verband tussen de acceleratie van een auto en het snelheidsverschil van deze auto met zijn voorgaande auto. Hij deelt het verkeer ruwweg op in licht verkeer en zwaar verkeer. Dit onderscheid maakt hij door te zeggen dat er een optimale dichtheid is waarvoor de verkeersdoorstroming het grootst is. Verder worden er een aantal verschillende situaties behandeld waaronder: verkeerslichten die op groen springen; automobilisten die remmen; lichtverkeer haalt zwaarder verkeer in (schokgolven); uniforme stroming die gestopt wordt door een roodlicht of ongeluk en het effect daarvan; opritten en afritten worden opgenomen in het model.

De rest van mijn literatuurstudie heb ik me hoofdzakelijk gericht op het discrete model. Zo wordt in bron [2] een model opgesteld waarbij de acceleratie van een auto wordt bepaald door het verschil tussen een optimale snelheid en de huidige snelheid van de auto. Deze optimale snelheid is afhankelijk van de afstand tussen de auto en zijn voorganger. Dit model wordt uitgebreid door te zeggen dat er ook gekeken kan worden naar de afstand tussen de voor-

gaande auto en de auto daar weer voor, enz.. Ook de snelheidsverschillen tussen meerdere opeenvolgende voorgaande auto's worden in het model betrokken en het model wordt multiple headway and velocity difference (**MHVD**) model genoemd. Een systeem genaamd intelligent transportation system (**ITS**) wordt ontwikkeld zodanig dat deze informatie wordt aangeboden aan de bestuurder van de auto met als hoofddoel de stabiliteit van de verkeersdoorstroming te verhogen om zo files te voorkomen. Het artikel gebruikt een optimale snelheidsfunctie die voor het eerst wordt geïntroduceerd in bron [3]. Hierin wordt ook gekeken naar de versnelling van een auto uitgedrukt in een verschil tussen een optimale snelheid en de huidige snelheid van de auto. De condities waaraan deze optimale snelheidsfunctie moeten voldoen worden opgesteld en er worden twee voorstellen gedaan voor zo'n functie waarvan het tweede in veel andere artikelen over Traffic Flow wordt gebruikt. Van de als tweede voorgestelde optimale snelheidsfunctie wordt laten zien dat hij reageert zoals je in het echte verkeer ook zou verwachten. Verder wordt er laten zien, d.m.v. numerieke analyse, dat de snelheid in het verkeer de neiging heeft om uiteindelijk naar bijna 0 te gaan (file) of naar de geldende maximumsnelheid. Dit gebeurt in de situatie dat alle auto's even ver van hun voorganger afzitten (uniforme stroming) en dit ongeveer de veilige afstand is. Ze kijken naar een stuk weg van lengte L met daarop N auto's. Bij een uniforme stroming worden alle afstandsverschillen tussen auto's onderling gegeven door $\frac{L}{N}$. Willen ze dus situaties beschouwen waarbij de auto's een dusdanig afstand tot hun voorgangers hebben dat er optimaal kan worden doorgereden dan moeten ze een juiste verhouding tussen de lengte van de weg en het aantal daarop rijdende auto's kiezen. Teveel auto's op een klein stukje weg resulteert in een uniforme filestroom en te weinig auto's op een lang stuk weg in een uniforme vrije doorstroming waar er met de maximumsnelheid wordt gereden. Tussen deze twee gebieden bevindt zich het voor hun interessante gebied waarin iedere auto optimaal (voor de totale stroming) kan doorrijden. Hiervoor wordt een veilige afstand geïntroduceerd om zo het onderscheid te maken tussen filestroming en vrije stroming.

H. Lenz, C.K. Wagner en R. Sollacher [4] introduceren ook een op meerdere auto's anticiperend *car-following* model. Dit doen ze net iets anders dan gebeurt in [2]. Ze laten de optimale snelheidsfunctie niet afhangen van de som van alle afstandsverschillen maar sommeren juist alle geschaalde verschillen van de optimale snelheid met de huidige snelheid om zo de versnelling van de auto te krijgen. Ze kijken niet naar afstandsverschillen tussen opeenvolgende auto's maar betrekken alleen de afstandsverschillen van de auto met alle auto's daar weer voor. Deze schalen ze op zo'n manier dat het afstandsverschil met de eerste voorgaande auto zwaarder meeweegt dan de afstandsverschillen met de auto's verder naar voren. Hun optimale snelheidsfunctie wordt overgenomen van [3].

In [5] komen H.X. Ge et al. met het idee om de optimale snelheidsfunctie wel van de som van de onderlinge afstandsverschillen van opeenvolgende auto's. Zij stellen hiervoor een gewichtsfunctie op om zo de afstandsverschillen tussen auto's dichterbij zwaarder te laten meewegen. De optimale snelheidsfunctie heeft hier al de vorm die ze in [2] ook gebruiken.

De schrijvers van [6] kijken in hun model (dat overigens weer een variant is op het optimal velocity (**OV**) model dat in [3] wordt beschreven en ook de basis vormt voor de modellen van de andere artikelen [2], [4] t/m [7]) niet naar meerdere *headways* (afstandsverschillen tussen een auto en zijn directe voorganger) maar naar meerder snelheidsverschillen tussen twee opeenvolgende auto's. Deze snelheidsverschillen worden als optelling vermenigvuldigd met een bepaalde gewichtfactor toegevoegd aan het **OV** model. Hiermee worden net als in de andere artikelen op dezelfde manier als in [3] numerieke analyses gedaan om te bepalen of deze toevoeging daadwerkelijk bijdraagt aan een stabielere uniforme stroming.

Het wordt tijd dat we gaan kijken naar een tweetal modellen voor de verkeersdoorstroming. Deze modellen zal ik gebruiken om tot een beter begrip te komen van hoe verkeer zich “gedraagt” en het enigszins kunnen inzien waarom files ontstaan. Uiteindelijk werken we toe naar een aanzienlijke verbetering van de verkeersdoorstroming door middel van een intelligent systeem (*ITS*) in de auto.

Hoofdstuk 3

Een continu model

Om een verkeersdoorstroming goed te kunnen beschrijven zullen we gebruik maken van een aantal basis grootheden:

Grootheid	symbool	eenheden
Snelheid	u	$\frac{km}{uur}$
Dichtheid	ρ	$\frac{aantal\ auto's}{km}$
Doorstroming	q	$\frac{aantal\ auto's}{uur}$

We nemen een weg met daarop een aantal auto's waarbij x_i de i^e auto is. De snelheid en versnelling van deze auto worden gegeven door:

$$v = \frac{dx_i(t)}{dt}, \quad a = \frac{d^2x_i(t)}{dt^2} \quad (3.1)$$

Daarbij beschouwen we x_i als middelpunt van de i^e auto, v de snelheid en a de versnelling van deze auto. We kunnen natuurlijk de snelheid van elke auto apart gaan meten. Dit wordt echter een lastige klus in een druk autoland als Nederland. Daarom kunnen we beter een snelheidsveld maken. $u(x, t)$ geeft dan de snelheid van een voertuig dat langs een observator komt op plaats x en op tijdstip t . Het **snelheidsveld** wordt nu gegeven door:

$$u(x_i(t), t) := u_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Om dubbelzinnigheid te voorkomen, mogen en kunnen twee auto's elkaar niet passeren. Dan zouden we in het snelheidsveld op één plaats en tijd twee verschillende snelheden hebben, dit kan niet omdat er maar één snelheid kan zijn.

3.1 Verkeersstroom (q) en verkeersdichtheid (ρ)

Bij het observeren van een weg kun je naast de snelheid ook nog wat zeggen over het aantal auto's dat een bepaald punt x in een uur passeert, dit noemen we de verkeersstroom q , uitgedrukt in aantal auto's per uur. Ook kun je naar een stuk weg kijken tussen bijvoorbeeld

$x = a$ en $x = b$ en voor een vast tijdstip het aantal auto's tellen. We krijgen dan de dichtheid, ρ , die we uitdrukken in een aantal auto's per kilometer. Bij het meten van deze twee grootheden is er echter een moeilijkheid met het kiezen van respectievelijk het tijds- en ruimtelijkinterval, voor het bepalen van q en ρ . Hier gaan we nu niet dieper op in. Voor mijn continue model neem ik aan dat er zulke intervallen bestaan, zodanig dat de bijbehorende functies van de positie en tijd voor q en ρ glad en continu zijn (uitgezet tegen respectievelijk de plaats(in km) en de tijd(in uren)). Voor meer informatie zie [1].

3.2 De relatie tussen q , u en ρ

Er is een mooie relatie tussen de drie fundamentele verkeers-variabelen. Deze luidt

$$q(x, t) = \rho(x, t) \cdot u(x, t). \quad (3.3)$$

Om dit te laten zien, kijken we naar het aantal auto's dat een punt $x = x_0$ passeert in een zeer korte tijd Δt . Als de tijd begint op t_0 dan loopt deze door tot en met $t_0 + \Delta t$. In zo'n klein tijdsinterval hebben de auto's niet veel kunnen bewegen en omdat $\rho(x, t)$ en $u(x, t)$ continue functies van x en t zijn, kunnen we op het tijdsinterval $[t_0, t_0 + \Delta t]$, $\rho(x, t)$ en $u(x, t)$ benaderen door de waarde van deze functies op $(x, t) = (x_0, t_0)$. Een waarnemer die zich bevindt op de plek $x = x_0$ zal dus een auto die op $t = t_0$ zich op $x = x_0 - u(x_0, t_0) \cdot \Delta t$ voor zijn neus hebben op tijdstip $t_0 + \Delta t$. Een auto kan immers in Δt tijd een afstand $s = u(x_0, t_0) \cdot \Delta t$ afleggen. De auto's die zich op het tijdstip $t = t_0$ op een plaats binnen het interval $[x_0 - u(x_0, t_0) \cdot \Delta t, x_0]$ bevinden, zullen worden waargenomen en geteld. Het aantal auto's dat geteld zal worden is gelijk aan $u(x, t) \cdot \Delta t \cdot \rho(x, t)$. De stroming, in aantal auto's per uur, wordt dan

$$q(x, t) := \frac{u(x, t) \cdot \Delta t \cdot \rho(x, t)}{\Delta t} = u(x, t) \cdot \rho(x, t). \quad (3.4)$$

Deze mooie relatie kunnen we dus, zoals hierboven is aangetoond, gebruiken voor zowel uniforme als niet uniforme (op een interval voor x en t) u en ρ .

3.3 Afleiding behoudswet

Het aantal auto's op een stuk weg tussen $x = a$ en $x = b$ wordt gegeven door

$$N := \int_a^b \rho(x, t) dx. \quad (3.5)$$

Hierin is N het aantal auto's tussen a en b . We gaan er hierbij van uit dat er tussen a en b geen auto's worden gemaakt noch worden vernietigd. Als de verkeersrichting van a naar b loopt dan is de enige manier dat het aantal auto's, tussen a en b , in de tijd toeneemt door de *instroom* bij $x = a$. Door de *uitstroom* van auto's bij $x = b$ neemt N af. In formule:

$$\frac{\partial N}{\partial t} := \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho(x, t) dx = q(a, t) - q(b, t). \quad (3.6)$$

Het behoud van het aantal auto's tussen twee willekeurige punten a en b hebben we geschreven in de integraal vorm. Er staan partiele afgeleiden in omdat de begin- en eindpunten van het interval $[a, b]$ willekeurig zijn maar wel vastliggen voor een bepaalde t . We weten dat: $q(a, t) - q(b, t) := - \int_a^b \frac{d}{dx}[q(x, t)] dx$. Deze vergelijking samen met vergelijking (3.6) geeft dat $\int_a^b \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right) dx = 0$.

De bovenstaande vergelijking kan alleen maar nul opleveren als de integrand voor alle intervallen $[a, b]$ nul is. Dus

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \cdot u}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

Hierboven staat de formule voor het behoud van auto's uitgedrukt in een partiële differentiaal vergelijking (p.d.v.). Deze formule geeft een relatie tussen de dichtheid, ρ en het snelheidsveld $u(x, t)$. Hiermee is het mogelijk om de verkeersdichtheid $\rho(x, t)$ voor alle plaatsen x in de toekomst ($t > 0$) te voorspellen als $u(x, t)$ bekend is en we weten wat de dichtheid in het begin is ($\rho_0 = \rho(x, 0)$).

3.4 Het snelheidsveld $u(x, t)$

Uit het vorige stuk is gebleken dat het essentieel is om het snelheidsveld $u(x, t)$ te onderzoeken. Hiervoor gaan we kijken wat de redenen voor een automobilist zijn om op een bepaalde plaats en tijd een bepaalde snelheid te gaan rijden. Het is duidelijk dat als er weinig tot geen verkeer op de weg is (licht verkeer) de rijder zo hard kan rijden als hij wil. Dit is natuurlijk gelimiteerd door de op die plaats geldende maximumsnelheid en/of de maximale snelheid van de auto. Zodra je in een situatie komt met meer verkeer op de weg zul je af en toe moeten afremmen voor een langzamere voorganger. Inhalen kan dan nog en je zult dus gemiddeld niet veel onder je gewenste snelheid rijden. In nog drukker (zwaarder) verkeer zal het inhalen onmogelijk worden. En zal dus de gemiddelde snelheid van het verkeer dalen. Je bent dan afhankelijk van de snelheid van je langzamere voorganger (die weer afhankelijk is van de snelheid van zijn voorganger, enz. enz.).

We zouden dus logischerwijs kunnen stellen dat $u = u(\rho)$ met $u(0) = u_{max}$ en $u(\rho_{max}) = 0$ want met dichtheid 0 kun je je maximale snelheid rijden en bij een bepaalde dichtheid sta je stil (in de file bumper aan bumper). Als ρ stijgt dan zullen andere auto's jouw snelheid doen verlagen. En dus $\frac{du}{d\rho} := u'(\rho) \leq 0$.

De waarde van ρ_{max} is ongeveer bekend. Nemen we L als gemiddelde lengte van een auto, dan representeert $\rho = \frac{1}{L}$ de situatie dat alle auto's bumper aan bumper staan. Een bestuurder probeert dit te voorkomen en dus geldt overal $\rho_{max} < \frac{1}{L}$.

3.5 Optimaal gebruik maken van een weg

Van een weg willen we natuurlijk graag dat hij optimaal benut wordt. Met andere woorden, het aantal auto's per uur (q) willen we zo groot mogelijk hebben. Dit zal het geval zijn als de snelheid maximaal is (de geldende maximum snelheid) en de verkeersdichtheid maximaal. Immers dan geldt $q = u_{max} \rho_{max}$. Alleen dit houdt in dat auto's bijna bumper aan bumper

met de maximum snelheid rijden. Hetgeen niet echt veilig is, vandaar ook dat we in twee gevallen geen stroming van auto's waarnemen.

1. $q = 0$ als $\rho = 0$, want dan rijden er geen auto's
2. $q = 0$ als $\rho = \rho_{max}$, want $u(\rho_{max}) = 0$ en staan we dus in een file

Voor $0 < \rho < \rho_{max}$ moet gelden dat $q > 0$ en voor een dichtheid (ρ_{opt}) op dit interval bereikt de verkeersstroming dus een maximum. Hiervoor geldt $q(\rho_{opt}) = q_{max}$, deze maximale stroming op een weg noemen we de **capaciteit** van de weg. We nemen aan dat $\frac{d^2q}{d\rho^2} < 0$ d.w.z. $\frac{dq}{d\rho}$ daalt als ρ toeneemt. In deze aanname zit dus ook verwerkt dat een weg maar één capaciteit kan hebben. En we zien dus dat de verkeersdoorstroming steeds minder snel toeneemt en vervolgens daalt totdat $q = 0$ (oftewel een soort paraboolvorm (zie figuur 3.1)).

3.6 Bepalen verkeersdichtheid op latere tijdstippen, bijna uniform

Nu we aan de hand van de dichtheid kunnen bepalen hoe het snelheidsveld eruit ziet, kunnen we ons bezig gaan houden met het bepalen van de dichtheid op latere tijdstippen. Hiervoor hebben we alleen de informatie nodig op het huidige tijdstip. Met vergelijking (3.7), de behoudswet van auto's, kunnen we dan $\rho(x, t)$ voor alle x en t bepalen. Op het huidige tijdstip is de dichtheid niet overal gelijk dus $\rho(x, 0) = f(x)$ is een plaats-afhankelijke functie voor de begin dichtheid. Allereerst kunnen we vergelijking (3.7) omschrijven m.b.v. de ketting regel:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{dq(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

Vergelijking (3.8) is lastig om op te lossen en daarom gaan we de vergelijking eerst lineariseren.

Merk eerst op dat $\rho(x, t) = \rho_0 = \text{constant}$ een oplossing zal zijn. In het echt is het natuurlijk *nooit* zo dat de dichtheid voor alle t constant blijft. Als dichtheid nemen we dan deze constante dichtheid plus een verstoring:

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(x, t) \quad |\varepsilon \rho_1| \ll \rho_0 \quad (3.9)$$

Hierin is $\varepsilon \rho_1(x, t)$ de verstoring. De begindichtheid is $\rho(x, 0) = \rho_0 + f(x)$. Substitueren we vergelijking (3.9) in de p.d.v. (3.8) dan krijgen we:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho}(\rho_0 + \varepsilon \rho_1) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \varepsilon = 0 \quad (3.10)$$

Hierin wordt de afgeleide van de stroming naar de dichtheid $\frac{dq}{d\rho}$ genomen over de totale dichtheid. Met de Taylor-reeks kunnen we (door weglating van hogere orde termen) schrijven dat $\frac{dq}{d\rho}(\rho_0 + \varepsilon \rho_1) \approx \frac{dq}{d\rho}(\rho_0)$. Dit leidt tot een p.d.v. voor de verstoorte verkeersdichtheid $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0$. Met c een constante die gelijk is aan $\frac{dq}{d\rho}(\rho_0)$. Deze p.d.v. is lineair en deze is makkelijk oplosbaar.

3.6.1 Oplossen van gelineariseerde p.d.v.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0 \quad \rho_1(x, 0) = f(x) \quad (3.11)$$

Om deze gelineariseerde p.d.v. met bijbehorende beginconditie op te kunnen lossen introduceren we een bewegende ruimtelijke coördinaat $x'(t)$. Die beweegt met een snelheid c naar rechts. In het begin is het bewegende stelsel gelijk aan het stilstaande, $x(0) = x'(0)$ en dus hebben we dat voor latere tijdstippen $x(t) = x'(t) + ct$.

Het nieuwe coördinaten systeem wordt:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - ct \\ t' &= t \end{aligned}$$

Met dit coördinaten systeem wordt de p.d.v. (11) een stuk eenvoudiger:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -c \frac{\partial \rho_1}{\partial x'} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t'} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x'} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t'} = 0 \quad (3.12)$$

Om dit resultaat af te leiden is twee keer de kettingregel voor partieële afgeleiden gebruikt. Een oplossing van bovenstaande p.d.v. is $\rho_1(x, t) = g(x') = g(x - ct)$ met $\rho_1(x, 0) = f(x) \Rightarrow g(x - c0) = g(x) = f(x)$. De oplossing voor de totale verkeersdichtheid p.d.v. (3.8) is dan:

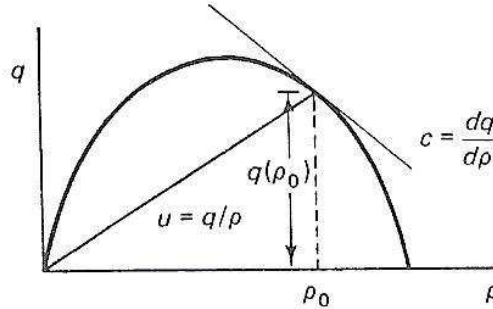
$$\rho(x, t) = \rho_0 + \varepsilon f(x - ct) \quad (3.13)$$

Aan deze oplossing zien we dat als $x - ct = \text{constant} = d$ dan blijft de dichtheid gelijk. De lijnen met deze vergelijkingen (voor "alle" constanten d) noemen we de **karakteristieken**. Dus als $\frac{dx}{dt} = c := \frac{dq}{d\rho}(\rho_0)$ (helling karakteristiek) dan blijft de dichtheid gelijk. In woorden: als een waarnemer met deze snelheid c beweegt dan zal hij voor alle toekomstige $t > 0$ dezelfde dichtheid waarnemen als die hij op $t = 0$ waarnam. Deze golfbeweging met snelheid c noemen we de **dichtheidsgolf**. Merk op dat deze dichtheidsgolf zich met een andere snelheid voortbeweegt dan de individuele auto's. Sterker nog, in het algemeen geldt: $c \leq u(\rho_0)$ want $c = \frac{dq}{d\rho}(\rho_0) = u(\rho_0) + \rho_0 u'(\rho_0)$. Omdat de snelheid van de auto's daalt als ρ_0 toeneemt, $u'(\rho) < 0$, loopt de dichtheidsgolf langzamer (of hooguit met gelijke snelheid) dan de snelheid van de auto's, $u(\rho_0)$. We beschouwen in dit geval alles bij een gegeven dichtheid $\rho = \rho_0$. Het is eenvoudig om op dezelfde manier na te gaan dat er ook geldt: $c(\rho) \leq u(\rho)$ waarin de snelheid dus nog kan variëren doordat ρ kan veranderen.

In de stromings-dichtheid grafiek (zie figuur 3.1) komt duidelijk naar voren dat de dichtheidsgolf zich zowel voorwaarts als achterwaarts t.o.v. het wegdek kan verplaatsen. We maken dan ook het volgende onderscheid:

- **Zwaar verkeer:** we spreken over zwaar verkeer als de dichtheid groter is dan de optimale dichtheid, $\rho > \rho_{opt}$. Een waarnemer zou nu in tegengestelde richting, $c < 0$, moeten rijden om dezelfde verkeersdichtheid te kunnen waarnemen.
- **Licht verkeer:** we spreken van licht verkeer als $\rho < \rho_{opt}$. Een waarnemer moet nu in dezelfde richting, met snelheid $c > 0$, als het verkeer bewegen en aanschouwt dan steeds dezelfde dichtheid.

3.7 De verkeersdichtheid-verkeersdoorstromings relatie



Figuur 3.1: verkeersdichtheid-verkeersdoorstromings kromme

In de stromings-dichtheid grafiek geeft de *helling* van de rechte lijn, $y(\rho)$, die door de oorsprong en het punt $(\rho_0, q(\rho_0))$ gaat de snelheid van een auto bij een verkeersdichtheid $\rho = \rho_0$. Immers: $y'(\rho) = \frac{q}{\rho} = u$.

Bij een dichtheid ρ_0 heeft de raaklijn aan $q(\rho)$ in het punt $(\rho_0, q(\rho_0))$ de helling c . Parallel aan deze raaklijn lopen voor deze dichtheid de karakteristieken in het (t, x) -assenstelsel.

Een auto bij een dichtheid ρ_0 heeft snelheid $\frac{dx}{dt} = u(\rho_0)$ en begint bij $(t = 0)$ op het punt $x = L$. De plaats voor de auto wordt gegeven door $x(t) = ut + L$ en zal dus altijd toenemen.

3.8 Bepalen verkeersdichtheid op latere tijdstippen, niet uniform

De dichtheid van auto's op de weg is zelden (bijna) uniform verdeeld. Daarom gaan we nu kijken naar het geval dat de dichtheid op verschillende plaatsen erg kan veranderen, zoals dat ook in de werkelijkheid veelvuldig voorkomt. Oftwel we kijken nu naar het geval dat de dichtheid van het verkeer niet uniform verdeeld is. De niet lineaire p.d.v. die hier bij hoort (afgeleid aan de hand van het behoud van auto's) hebben we al gezien en is:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{dq(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

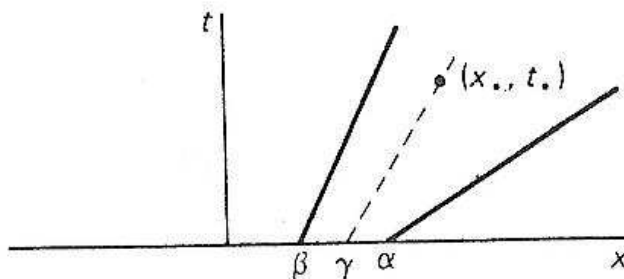
Een waarnemer die zich op tijdstip t op de plek $x(t)$ bevindt beweegt met de snelheid $\frac{dx(t)}{dt}$. Voor hem verandert de dichtheid als volgt:

$$\frac{d\rho(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.15)$$

Als nu $\frac{dx}{dt} = \frac{dq(\rho)}{d\rho}$ dan geldt er voor de waarnemer $\frac{d\rho}{dt} = 0$. De waarnemer bewegend met deze snelheid zal dus geen verandering van dichtheid waarnemen. Deze snelheid kan erg veranderen omdat het nog van ρ afhangt. Daarom lopen de karakteristieken (waar overigens nog steeds geldt $\rho = \text{constant}$) niet meer parallel aan elkaar want er geldt nu het volgende

voor een karakteristiek. Een karakteristiek (algemeen):

- Begin positie $t = 0$
 $x = \alpha$
- $\frac{dx}{dt} = q'(\rho) \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0$ dus $\rho = \text{constant}$
- $\rho(\alpha, 0) = \rho_\alpha$ geldt op de hele karakteristiek.
- De vergelijking van de karakteristiek is: $x = q'(\rho_\alpha)t + \alpha$
- en dus $\frac{dx}{dt} = q'(\rho_\alpha)$ is de helling van de karakteristiek.



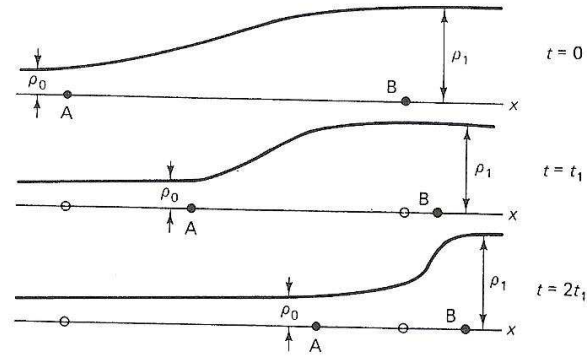
Figuur 3.2: De twee karakteristieken met de derde die door het punt (x_*, t_*) gaat.

Deze hellingen verschillen voor verschillende beginposities van de karakteristieken, want de dichtheid verschilt dan. Met deze methode kunnen we de dichtheid van het verkeer in de toekomst voorspellen. Als we bijvoorbeeld van twee beginposities de karakteristieken kennen: $x_1 = q'(\rho_\alpha)t + \alpha$ en $x_2 = q'(\rho_\beta)t + \beta$ en gegeven is dat $\alpha > \beta$ en $q'(\rho_\alpha) > q'(\rho_\beta)$. Nu willen we de dichtheid op een willekeurig punt, tussen de karakteristieken x_1 en x_2 , (x_*, t_*) weten. We proberen nu een karakteristiek $x_3 = q'(\rho_\gamma)t + \gamma$ door dit punt heen te tekenen. Als dit is gelukt weten we de dichtheid op het punt (x_*, t_*) omdat dit hetzelfde is als de begindichtheid $\rho(\gamma, 0)$. Het verloop van x_3 kunnen we eventueel schatten m.b.v. de bekende hellingen van x_1 en x_2 .

3.9 Opstopping in zicht

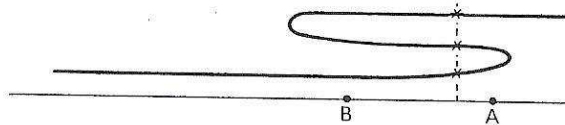
In het bovenstaande zijn we er stilzwijgend van uitgegaan dat de karakteristieken elkaar niet kunnen snijden. Dit kan echter wel gebeuren en levert een rare situatie op. Want op zo'n snijpunt van twee karakteristieken zouden er dan dus twee verkeersdichtheden worden waargenomen. Dit is natuurlijk erg vreemd omdat je op een punt op een bepaald tijdstip, (x, t) , altijd maar één dichtheid waarneemt! Hoe kan het dan toch gebeuren dat twee karakteristieken elkaar snijden en hoe lossen we dit probleem in ons continue model op?

Deze "fout" sluipt in ons model in de volgende situatie. Stel je voor, je rijdt in het begin (net na $t = 0$) in licht verkeer met een dichtheid ρ_0 . Op datzelfde ogenblik is er verderop op



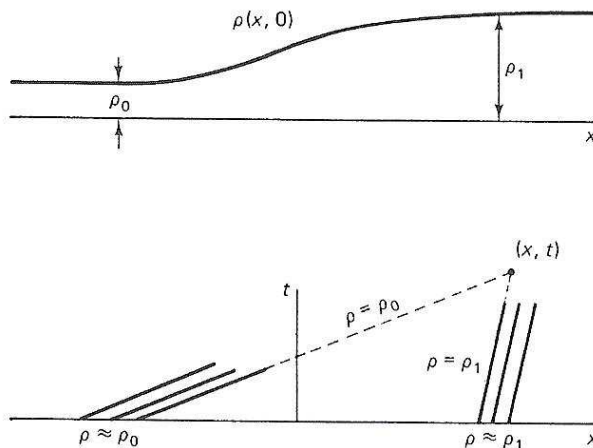
Figuur 3.3: Waarnemer A in licht verkeer loopt in op waarnemer B.

de weg veel meer verkeer, de dichtheid is daar ρ_1 . De dichtheidsgolf van het lichte verkeer beweegt met een hogere snelheid als die van het wat zwaardere verkeer, $\left. \frac{dq}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_1} < \left. \frac{dq}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}$. Daarom zullen de twee bijbehorende karakteristieken elkaar uiteindelijk snijden. Ons model zegt dan dat we op dat snijpunt (x_*, t_*) een dichtheid ρ_0 en ρ_1 hebben. Dit is onmogelijk dus er moet iets fout zijn gegaan.



Figuur 3.4: De dichtheid als meerwaardige functie van de plaats doordat A, waarnemer B heeft ingehaald.

Om nog even beter uit te leggen wat er nou gebeurt nemen we twee waarnemers, A en B. A begint in het lichte verkeer en B in het zwaardere verkeer. Beiden blijven ze dezelfde dichtheid waarnemen. A beweegt dus sneller vooruit dan B en zal deze dus uiteindelijk in gaan halen. Oftewel de afstand tussen het lichte verkeer en het zwaardere verkeer wordt kleiner en uiteindelijk mengt het lichte verkeer zich met het zwaardere verkeer. De overgang van licht verkeer naar het zwaardere verkeer bij B gaat dus steeds abrupter en de dichtheidsverdeling wordt dus steeds steiler. Nadat A waarnemer B heeft ingehaald is het zo dat de verkeersdichtheid een meerwaardige functie is van de plaats. Net zoals bij golven in de branding zeggen we nu dat de dichtheidsgolf “breekt”. Waar het bij watergolven erg belangrijk is, is het bij deze verkeersdichtheid golven juist helemaal niet mogelijk dat dit gebeurt. De dichtheid moet een enkelwaardige functie van de positie zijn.



Figuur 3.5: Snijdende karakteristieken als gevolg van een dichtheidsverschil.

3.10 Discontinue golven

Op basis van de p.d.v. van de verkeersdoorstroming kwam er een meerwaardige functie voor de dichtheid uitrollen. We gebruikten de methode van karakteristieken, deze methode is wiskundig correct dus moet er ergens in een aanname of bij een benadering om tot de p.d.v. te komen een fout zijn gemaakt. Hierin hoeven we dus alleen voor de probleemsituatie(s) een aanpassing te maken.

We zijn er in de afleiding van de p.d.v. van uit gegaan dat de dichtheid en doorstroming continue functies zijn waardoor we de integraalbehoudswet voor het aantal auto's kunnen schrijven als een differentiaal behoudswet. Als het nodig is, dus in het geval van een meerwaardige functie voor de dichtheid, dan nemen we niet meer aan dat $\rho(x, t)$ en $u(x, t)$ continue functies van x en t zijn.

Laat $\rho(x, t)$ en $u(x, t)$ discontinue functies zijn op plek $x_s(t)$. Deze discontinuïteit kan zich verplaatsen in de tijd. We beschouwen het aantal auto's voor x tussen $x_1 < x < x_2$ waarvoor geldt dat $x_1 < x_s < x_2$. Dit aantal wordt gegeven door:

$$N(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx$$

deze formule geldt nog steeds, ook al integreer je over een sprong-discontinuïteit bij $x = x_s$. Het aantal auto's verandert tussen x_1 en x_2 als t verandert dit wordt in formules weergegeven als volgt:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - \rho(x_1, t) \frac{dx_1}{dt} - [q(x_2, t) - \rho(x_2, t) \frac{dx_2}{dt}]$$

We laten nu de grenzen x_1 en x_2 op oneindig kleine afstand van de plek waar de schok plaats vindt, x_s , mee bewegen. Nog steeds geldt: $x_1 < x_s < x_2$. Tussen deze grenzen kan zich geen auto meer bevinden \Rightarrow

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho dx = 0 \Rightarrow 0 = q(x_1, t) - \rho(x_1, t) \frac{dx_1}{dt} - [q(x_2, t) - \rho(x_2, t) \frac{dx_2}{dt}]$$

beide grenzen bewegen met dezelfde snelheid als de schok, dus:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_s}{dt} \quad (3.16)$$

De relatieve doorstroming aan de ene kant van de bewegende schok moet wel gelijk zijn aan die aan de andere kant. Voor de schoksnelheid houdt dit in dat:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{[q]}{[\rho]} = \frac{q(x_1, t) - q(x_2, t)}{\rho(x_1, t) - \rho(x_2, t)} = \frac{\rho_2 u(\rho_2) - \rho_1 u(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$$

De laatste stap wordt gemaakt onder de aanname dat er aan de ene kant van de schok een dichtheid ρ_1 is en aan de andere kant ρ_2 . Dit is een logische aanname want in een uniforme verkeersdichtheidssituatie hadden we het probleem van een meerwaardige dichtheidsfunctie niet eens gehad.

Op de discontinue punten vervangt de schok-conditie de p.d.v. die op andere plaatsen geldt. Hiermee hebben we het probleem van meerdere dichtheden op één plek opgelost.

Zo'n oplossing van het probleem, dat er steeds meer verkeer op één plek komt doordat het lichtere verkeer het zwaardere verkeer "inhaalt" (waardoor er dus een file ontstaat), is niet echt netjes. Het is dan ook lastig om met dit continue model goed te kijken naar wat er in zo'n situatie van een file gebeurt. Omdat het ons doel is om filevorming tot een minimum te beperken zullen we wel beter moeten kijken naar deze situatie. Daarom voeren we nu een model in waarin we veel gedetailleerder en nauwkeuriger naar het verkeer kunnen kijken.

Hoofdstuk 4

Een discreet model

4.1 Het *car-following* model

Een gedetailleerdere manier om naar het verkeer te kijken is door naar iedere auto apart te kijken. Je kunt dan wat zeggen over of de bestuurder van die auto versnelt of afremt aan de hand van het onderlinge snelheidsverschil met zijn voorganger. Als zijn voorganger langzamer rijdt dan zal de bestuurder uiteindelijk een keer moeten afremmen. Op dezelfde manier zal een bestuurder gas bijgeven als zijn voorganger sneller rijdt dan hij. De snelheid van de auto ervoor is op zijn beurt weer afhankelijk van de auto daar weer voor, enz.. Je zou dus kunnen zeggen dat de snelheid van een auto afhangt van het onderlinge snelheidsverschil met al zijn voorgangers. Hier gaan we eerst niet dieper op in maar we beginnen met een model af te leiden waarin de beweging van een auto alleen afhangt van de auto die er voor rijdt. Dit noemen we een **car-following model**.

We bekijken nu de n^e auto op de weg. Deze bevindt zich op een plek $x_n(t)$ op de weg. Ook nemen we weer aan dat auto's elkaar niet kunnen inhalen. In het simpelste geval zouden we kunnen zeggen dat de acceleratie van een auto proportioneel is met het relatieve snelheidsverschil met de voorganger,

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = \lambda \left(\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right) \quad (4.1)$$

Hierin is $\lambda > 0$ want de $(n+1)^e$ auto rijdt voor de n^e auto. Als de auto die volgt sneller zou gaan dan zijn voorganger dan moet de acceleratie negatief zijn (i.e. de auto moet remmen). De λ stelt hier de gevoeligheid van de acceleratie voor. Je zal namelijk heftiger moeten remmen om een botsing te voorkomen naarmate het snelheidsverschil met je voorganger groter, $\left(\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right) < 0$, en de onderlinge afstand met je voorganger kleiner wordt. In onze huidige formule reageert de bestuurder gelijk op een snelheidsverschil. In het echt zit hier nog een tijdje tussen, namelijk: de reactietijd van de bestuurder. Als we dit meenemen dan wordt de formule:

$$\frac{d^2x_n(t+T)}{dt^2} = \lambda \left(\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right), \quad (4.2)$$

met T de reactietijd. Wiskundig gezien hebben we nu een systeem van **gewone differentiaalvergelijkingen** met een vertraging erin. Door de bovenstaande vergelijking te integreren verkrijgen we:

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = \lambda(x_{n+1}(t) - x_n(t)) + d_n$$

met d_n de integratie constante. Deze vergelijking relateert de snelheid van auto's op een later tijdstip met de afstand tussen auto's. Stel je een *steady-state* voor, d.w.z. de afstanden tussen alle auto's zijn gelijk (uniforme stroming) \Rightarrow de auto's bewegen met dezelfde snelheid (en dat blijft ook zo voor alle t). Dus ook

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = \frac{dx_n(t)}{dt}$$

en waar dus ook geldt $d_n = d$. Voor de dichtheid kunnen we zeggen dat

$$\frac{1}{\rho} = x_{n+1}(t) - x_n(t).$$

Hieruit volgt de snelheids-dichtheid relatie:

$$u = \frac{\lambda}{\rho} + d,$$

de snelheid is immers alleen afhankelijk van de afstand tussen twee opeenvolgende auto's en die afstand is steeds gelijk (uniform). Deze snelheid is natuurlijk nul bij ρ_{max} wat gelijk staat aan bumper aan bumper verkeer, dus kiezen we d zodanig dat $u(\rho_{max}) = 0$. Dus er moet gelden dat

$$0 = \frac{\lambda}{\rho_{max}} + d.$$

De vergelijking voor het snelheidsveld wordt dan:

$$u = \lambda \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{max}} \right) \quad (4.3)$$

Deze vergelijking is een goede benadering voor de werkelijkheid als de dichtheid groot genoeg is, d.w.z. dichtbij $\rho = \rho_{max}$. Het probleem is echter dat als de dichtheid naar $\rho = 0$ toegaat de snelheid naar oneindig gaat. Dit is makkelijk te verhelpen door te zeggen dat bij kleine dichtheden de snelheid van een auto begrensd wordt door de maximum snelheid u_{max} . De doorstroming in dit model wordt dus gegeven door (bedenk dat $q = \rho u$):

$$q = \begin{cases} u_{max}\rho & \text{als } \rho < \rho_c \\ \lambda \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) & \text{als } \rho > \rho_c \end{cases} \quad (4.4)$$

Waar ρ_c zodanig wordt gekozen dat de doorstroming q een continue functie is van de dichtheid ρ .

Het enige wat ons nu nog rest is een mooie uitdrukking voor de gevoeligheidsfactor λ vinden. Hoe dichter een bestuurder op zijn voorganger zit hoe waarschijnlijker het is dat hij sterk reageert op een relatief snelheidsverschil met zijn voorganger. Je zou dus kunnen stellen dat λ , invers proportioneel is aan het onderlinge afstandsverschil, d.w.z.:

$$\lambda = \frac{c}{x_{n+1}(t) - x_n(t)}$$

Het uiteindelijke car-following model wordt dan:

$$\frac{d^2 x_n(t+T)}{dt^2} = c \frac{\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt}}{x_{n+1}(t) - x_n(t)} \quad (4.5)$$

hetgeen een niet lineair *car-following* model weergeeft. De constante c zouden we kunnen bepalen door onderzoek te doen op een weg. Door veel waarnemingen te doen kunnen we aan de hand van de gevonden waarden de beste waarde voor c uitrekenen. Deze constante blijkt namelijk erg belangrijk te zijn omdat de snelheid van de auto's bij een maximale doorstroming gelijk is aan deze constante. Dit kunnen we inzien door het snelheidsveld te bepalen van de uniforme stroming die hoort bij dit niet lineaire *car-following* model van vergelijking (4.5). Dit gaat grotendeels opdezelfde manier als bij het lineaire geval in vergelijking (4.2) en verder. Dus: vergelijking (4.5) integreren geeft:

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = c \ln |x_{n+1}(t) - x_n(t)| + d$$

De *steady-state* oplossing voor het snelheidsveld is dan:

$$u = -c \ln(\rho) + d.$$

De integratieconstante d kiezen we weer zo dat geldt $u(\rho_{max}) = 0$, dus

$$d = c \ln(\rho_{max})$$

en het snelheidsveld wordt dan gegeven door

$$u = -c \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right).$$

We zien weer dat als $\rho \rightarrow 0$ dan zal $u \rightarrow \infty$, dit wordt weer voorkomen door te zeggen dat voor kleine dichtheden geldt dat $u = u_{max}$. De verkeersdoorstroming

$$q = \rho u = -c \rho \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

is maximaal wanneer

$$\frac{dq}{d\rho} = 0 = -c \left(\ln\left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right) + 1 \right).$$

Dit is het geval voor

$$\rho = \frac{\rho_{max}}{e}$$

en de snelheid bij deze maximale verkeersdoorstroming wordt dan dus gegeven door

$$u\left(\frac{\rho_{max}}{e}\right) = c.$$

Het praktische aan zo'n *car-following* theorie is dat ze de individuele handelingen van een enkele bestuurder koppelen aan het collectieve "rijgedrag" van een hele stoet auto's.

4.2 Optimal velocity

Een model dat hier veel op lijkt is het *optimal velocity* (OV) model. Dit doet hetzelfde als het *car-following* model dat hierboven beschreven wordt. Alleen het neemt nu nog de *headway* in beschouwing. De *headway* is de "afstand" tussen een auto en zijn voorganger gemeten in de tijdseenheid seconden (of gewoon in meters). Als een veilige maat voor de *headway* wordt vaak 2 seconden genomen. Denk aan de overbekende 2-secondenregel. Minimaal twee seconden afstand houden is zodanig gekozen om botsingen te voorkomen. De reactietijd, T , van een persoon is gemiddeld 1,3 seconden en dus zal deze 2 seconden in een normale situatie voldoende moeten zijn.

We kunnen deze *headway* in ons model verwerken door te praten over een optimale snelheid $V(\cdot)$ die afhankelijk is van $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$, de afstand tussen een auto (n^e auto) en de auto ervoor ($(n+1)^e$ auto). Als we $v_n(t) = \frac{dx_n(t)}{dt}$ nemen als snelheid van de n^e auto dan ziet ons nieuwe model er als volgt uit:

$$\begin{aligned} \frac{dx_n(t+\tau)}{dt} &= V(\Delta x_n(t)) \\ \frac{d^2x_n(t)}{dt^2} &= c[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] \quad (n = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.6)$$

met c de gevoeligheids parameter (onafhankelijk van n). In de eerste vergelijking staat τ voor de vertragingstijd, dat is de tijd die is toegestaan waarin de n^e auto de optimale snelheid $V(\Delta x_n(t))$ moet bereiken (wanneer de verkeersdoorstroming varieert) i.e. τ staat voor de vertragingstijd waarin de snelheid van de auto de optimale snelheid bereikt als de verkeersdoorstroming varrieert. Het idee van het model is dat de bestuurder de snelheid van de auto aanpast op tijdstip t aan de hand van de waargenomen *headway* met de auto ervoor op het tijdstip $t - \tau$ om zo de optimale snelheid te bereiken. De tweede vergelijking volgt uit de eerste door deze uit te schrijven in zijn **Taylor reeks**.

Immers uit de Taylor reeks volgt:

$$\begin{aligned} \frac{dx_n(t+\tau)}{dt} &= \frac{dx_n(t)}{dt} + \frac{d^2x_n(t)}{dt^2}\tau + O(\tau^2) \\ \Rightarrow \frac{d^2x_n(t)}{dt^2} &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{dx_n(t+\tau)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right) \\ &= c[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] \end{aligned}$$

hierbij zijn de hogere orde termen weggelaten. Ook zien we dat de gevoeligheids parameter gegeven wordt door: $c = \frac{1}{\tau}$. Hetgeen logisch is, want hoe kleiner de tijd is die je "hebt" om je snelheid aan te passen naar de optimale snelheid (afhankelijk van de afstand tot je

voorganger), hoe heftiger je moet reageren (accelereren dan wel afremmen).

Door de formule voor de optimale snelheid $V(\cdot)$ zal de auto die volgt blijven afremmen en accelereren totdat hij zich op een afstand Δx , “een veilige afstand”, van zijn voorganger bevindt z.d.d. $V(\Delta x_n(t)) = v_n(t)$. Hierin zien we dat als de *headway* (Δx_n) kleiner wordt, de snelheid v_n lager moet worden, zoveel lager dat een botsing met de auto voor je voorkomen wordt. Als de *headway* groter wordt dan kun je met een hogere snelheid rijden maar niet sneller dan de geldende maximumsnelheid. De functie V voldoet dus aan de volgende eigenschappen:

1. Het is een monotoon toenemende functie van Δx
2. $|V(\Delta x)|$ heeft een bovengrens, namelijk: $V_{max} \equiv V(\Delta x_n \rightarrow \infty)$
3. $|V(\Delta x)|$ heeft een ondergrens, namelijk: $V_{min} \equiv V(\Delta x_n \rightarrow 0) = 0$

Later zullen we een functie voorstellen voor de optimale snelheid. Deze functie zal voldoen aan bovenstaande eigenschappen en zal zo goed mogelijk het verwachte patroon van de doorstroming weergeven, zodanig dat er files ontstaan i.p.v. ongelukken als het druk wordt. De *headway*, Δx , komt bij een snelheid v_n overeen met een bepaalde *headway*, bijvoorbeeld 2 seconden. Hieraan zien we dat afstand Δx naar verschillende waarden zal “convergeren” voor verschillende snelheden, $v_n(t)$. Dit omdat bij een hogere snelheid een grotere afstand nodig is om veilig te kunnen reageren op je voorganger en visa versa.

4.3 Multiple velocity difference model

Je kunt dit model uitbreiden tot een model waarin meerdere *headways* worden beschouwd van zowel de auto's achter als voor de n^e auto. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} \frac{dx_n(t + \tau)}{dt} &= V(\Delta x_{n+p_+}(t), \dots, \Delta x_{n+1}(t), \Delta x_n(t), \Delta x_{n-1}(t), \dots, \Delta x_{n+p_-}(t)) \\ \frac{d^2x_n(t)}{dt^2} &= c[V(\Delta x_{n+p_+}(t), \dots, \Delta x_{n+1}(t), \\ &\quad \Delta x_n(t), \Delta x_{n-1}(t), \dots, \Delta x_{n+p_-}(t)) - v_n(t)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

waarin $\Delta x_{n+p_+}(t), \dots, \Delta x_{n+1}(t)$ de *headways* zijn van de auto's voor de n^e auto en $\Delta x_{n-1}(t), \dots, \Delta x_{n+p_-}(t)$ de *headways* van de auto's erachter. Als $p_+ = p_- = 0$ dan is dit model hetzelfde als het OV model. Door deze *headways* ook in beschouwing te nemen kunnen we de stabiliteit van de doorstroming verhogen. Het gevoelsmatige idee achter dit model is het volgende. Als de afstand tussen de $(n+2)^e$ auto en de $(n+1)^e$ auto, $\Delta x_{n+1}(t)$, minder wordt dan zal de $(n+1)^e$ auto langzamer moeten gaan rijden wil deze niet op zijn voorganger botsen. Dit heeft natuurlijk effect op de n^e auto. Hij zal op den duur ook moeten afremmen omdat hij niet op de $(n+1)^e$ auto wil botsen. Deze $(n+1)^e$ auto is immers langzamer gaan rijden waardoor $\Delta x_n(t)$ kleiner kan worden. Dit zelfde gedachtensprongetje werkt op dezelfde manier voor de *headways* van de auto's daar weer voor. Indirect heeft het zijn uitwerking op het acceleratie- remgedrag van de n^e auto. Hier zal ik naarmate het model nog meer wordt

“verbeterd” dieper op ingaan.

Wat we kunnen doen is kijken naar meerdere snelheidsverschillen tussen twee opeenvolgende auto's van voor de n^e auto. We krijgen dan het model:

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = c[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \sum_{j=1}^q \kappa_j \Delta v_{n+j-1}(t) \quad (4.8)$$

In deze vergelijking is q het aantal auto's dat we voor de n^e auto beschouwen, $\Delta v_{n+j-1}(t) = v_{n+j} - v_{n+j-1}$ het snelheidsverschil tussen twee opeenvolgende auto's. De factor κ_j stelt een gewichtsfunctie voor, die dus bepaalt hoeveel invloed een snelheidsverschil heeft op de n^e auto.

Het idee achter dit model is dat als bijvoorbeeld de $(n+1)^e$ auto harder rijdt dan de n^e auto zal de n^e auto versnellen. Rijdt echter de $(n+2)^e$ auto langzamer dan de $(n+1)^e$ auto $\Rightarrow \Delta v_{n+1}(t) < 0 \Rightarrow (n+1)^e$ auto moet afremmen en dit heeft indirect ook als gevolg dat de n^e auto moet afremmen, want dan is $\Delta v_n < 0$ en dus $\frac{d^2x_n}{dt^2} < 0$. Het is wel duidelijk dat we kunnen stellen dat de waarde van κ_j afneemt als j groter wordt. Dit omdat de snelheid van de auto voor je het meeste effect op je heeft en een auto 100 auto's verder haast geen effect teweeg brengt (en als dit wel zo is dan zal zich dit vertalen naar een effect op de auto's dichterbij, wat weer effect heeft op de auto voor je en dat heeft weer effect op jou). De andere snelheidsverschillen hebben dus een indirect effect op Δv_n en wegen dus ook mee in κ_1 .

De twee modellen die we hierboven hebben beschreven kunnen we combineren tot één model. Een model waarin we dus zowel meerdere afstandsverschillen als snelheidsverschillen tussen twee opeenvolgende auto's verwerken. We noemen dit het *multiple headway and velocity difference model (MHVD)*. De bijbehorende differentiaal vergelijking is dus:

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = c[V(\Delta x_n(t), \Delta x_{n+1}(t), \dots, \Delta x_{n+p-1}(t)) - v_n(t)] + \sum_{j=1}^q \kappa_j \Delta v_{n+j-1}(t) \quad (4.9)$$

met $c = \frac{1}{\tau}$, $\kappa_j = \frac{\lambda_j}{\tau}$ en hierin zijn p en q het aantal auto's die voor de n^e auto rijden die we in dit model beschouwen, respectievelijk voor de beschouwing van het aantal *headways* en snelheidsverschillen.

In het algemene geval zullen we altijd hebben dat $p = q$ maar natuurlijk kunnen we dit volstrekt willekeurig kiezen om te kijken wat de uitwerking hiervan is. We nemen nu aan, net zoals in bron [5], dat de optimale snelheidsfunctie op de volgende collectieve manier van de *headways* afhangt:

$$V(\Delta x_n(t), \Delta x_{n+1}(t), \dots, \Delta x_{n+p-1}(t)) = V\left(\sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t)\right)$$

waar β_l een gewichtsfunctie is van Δx_{n+l-1} die voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. β_l voor $(l = 1, 2, \dots, p)$ neemt monotoon af als l toeneemt. Dus $\frac{\beta_l}{\beta_{l-1}} < 1$. Dit omdat we weten dat de invloed op de optimale snelheid van de *headways* van auto's die verder voor het n^e voertuig rijden steeds minder wordt en dus minder zwaar meewegen.
2. $\sum_{l=1}^p \beta_l = 1$, en $\beta_l = 1$ als $p = 1$. Hier nemen we voor $p > 1$ dat

$$\beta_l = \begin{cases} \frac{6}{7^l} & \text{als } l \neq p \\ \frac{1}{7^{p-1}} & \text{als } l = p \end{cases} \quad (4.10)$$

In bron [3] wordt deze formule (in een eenvoudigere vorm) voor het eerst gekozen om zo een realistisch model te maken waarin de bestuurder de auto bestuurd door geleidelijk aan te accelereren of af te remmen, dusdanig dat de auto nooit de voorgaande auto passeert. De schrijvers laten zien dat het model met deze $V(\Delta x)$ het verwachte gedrag van de verkeersdoorstroming modelleert en dat er opstoppingen ontstaan in plaats van botsingen. In mijn andere bronnen wordt steeds een naar hun eigen model aangepaste optimale snelheidsfunctie gebruikt die is afgeleid uit de functie die in bron [3] gebruikt wordt (zie ook de bronnen: [2], [4], [5], [6] en [7] voor overeenkomstige optimale snelheidsfuncties).

De **optimale snelheidsfunctie** wordt dan:

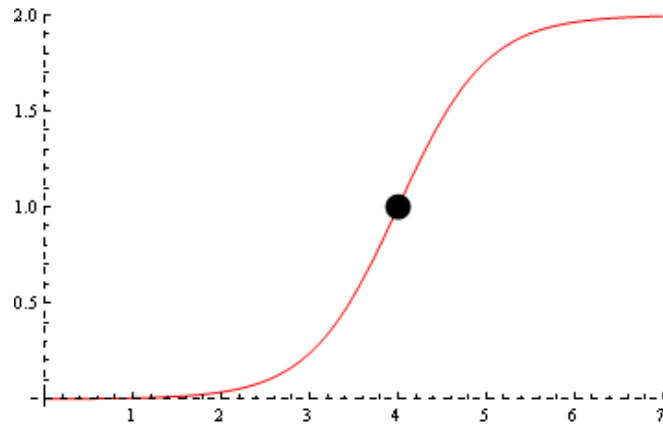
$$V \left(\sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t) \right) = \frac{1}{2} v_{max} \left[\tanh \left(\sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t) - h_c \right) + \tanh(h_c) \right] \quad (4.11)$$

v_{max} is de plaatselijke maximum snelheid en h_c de veilige afstand tot je voorganger (veilige *headway*). We zullen deze formule goed analyseren om te laten zien waarom deze geschikt is voor de optimale snelheid. Dit doen we aan de hand van het simpele geval $p = 1$, dus met maar één *headway* in beschouwing genomen. We krijgen dan:

$$V(x_{n+1} - x_n) = \frac{1}{2} v_{max} \tanh(h_c) + \frac{1}{2} v_{max} \tanh((x_{n+1} - x_n) - h_c) \quad (4.12)$$

Omdat $-1 \leq \tanh(x) \leq 1$ geeft de eerste term aan dat bij een grotere veilige afstand h_c een hogere snelheid hoort. In het begin (in de buurt van $h_c = 0$ en iets groter) zal als de h_c groter wordt de V ook snel stijgen maar op den duur maakt het natuurlijk niks meer uit. Bij een h_c van 4 km zal het voor je snelheid niet veel meer uitmaken of de veilige afstand toe- of afneemt, de auto die voor je rijdt zie je waarschijnlijk niet eens. Dus de eerste term $\frac{1}{2} v_{max} \tanh(h_c)$ geeft mooi weer hoe de optimale snelheid V van de veilige afstand h_c afhangt en zorgt er tevens voor dat $V(\cdot)$ nul wordt als $\Delta x \rightarrow 0$.

De tweede term uit de functie voor V voegt wat toe als $(x_{n+1} - x_n) - h_c \neq 0$. Want anders, bij een gelijkheid, zou je precies op de veilige afstand h_c van je voorganger rijden en wordt je optimale snelheid alleen door die afstand h_c bepaald. Als $(x_{n+1} - x_n) - h_c > 0$, oftewel $(x_{n+1} - x_n) > h_c$, dan zal als Δx_n net een beetje groter is dan h_c bij $\Delta x_n + \delta x$ de snelheid aanzienlijk opgevoerd kunnen worden. Als $(x_{n+1} - x_n) \gg h_c$ dan zal een kleine verandering van de *headway* Δx_n haast niks uitmaken omdat je al vrijuit kon rijden omdat je een meer dan veilige afstand tot je voorganger aanhoudt en hangt je V alleen af van v_{max} . Andersom, als je net iets minder afstand houdt tot je voorganger dan de veilige afstand, $(x_{n+1} - x_n) < h_c$,



Figuur 4.1: Vergelijking (4.12) geplot. Met voor $v_{max} = 2$ en $h_c = 4$. Op de horizontale as staat de *headway* Δx_n en op de verticale as de optimale snelheid V .

dan zal je flink op je snelheid in moeten leveren als je nog net iets dichters op je voorganger gaat rijden, d.w.z. als Δx_n nog iets kleiner wordt (de tweede term van (4.12) wordt immers negatief). Als $\Delta x_n \rightarrow 0$ dan $V \rightarrow 0$ en hebben we dus te maken met een file en dat klopt natuurlijk ook want we staan nu tegen de bumper van de voorgaande auto aan. Er zal nu eerst weer een aanzienlijke $\Delta x_n \gg 0$ moeten ontstaan voordat er relatief weer veel snelheid bij zal komen, want ook de $h_c \rightarrow 0$ in een situatie als een file. Uit de uitvoerige beschouwing van de optimale snelheidsformule blijkt dus dat deze precies de snelheidsveranderingen van het “verkeer” beschrijft zoals we het graag willen hebben.

4.4 Lineaire stabiliteitsanalyse

Nu we het model hebben opgesteld willen we graag onderzoeken of het voor de stabiliteit van de doorstroming effect heeft om meerdere auto’s voor je in beschouwing te nemen. Met stabiliteit bedoelen we in dit geval de situatie dat je gewoon kan doorrijden en niet dat bij een kleine verandering van de verkeers-dichtheid ineens het verkeer stil staat.

We beschouwen nu een uniforme doorstroming, dat houdt in dat de auto’s bewegen terwijl de *headways* steeds gelijk blijven (dus: $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = \dots = \Delta x_{n+p-1} = \frac{L}{N} = h$), wat dus een *steady-state* is omdat je voor elk willekeurig later tijdstip hetzelfde waarneemt. L staat hier voor de lengte van de weg en N voor het totaal aantal auto’s op die weg. Het is duidelijk dat de optimale snelheid $V(h, h, \dots, h)$ is en dat de *steady-state* oplossing van de **MHVD** vergelijking (4.9) geven wordt door:

$$x_n^0(t) = hn + V(h, h, \dots, h)t \quad \text{met} \quad h = \frac{L}{N} \quad (4.13)$$

de n^e auto bevindt zich op $t = 0$ op positie hn op de weg en verplaatst zich vervolgens met constante snelheid $V(h, h, \dots, h)$, even snel als alle andere $N - 1$ auto’s. We zien dus dat geldt

$$\frac{dx_n^0}{dt} = V(h, h, \dots, h) \text{ en } \frac{d^2x_n^0}{dt^2} = 0.$$

Om de stabiliteit van deze oplossing te onderzoeken gaan we kijken wat er gebeurt als we de oplossing een heel klein beetje veranderen. Deze verstoorde vergelijking vullen we in in vergelijking (4.9). Door vervolgens voor de verstoring een Fourier-mode in te vullen kunnen we stabiliteit analyseren, de gevoeligheids parameter c speelt een grote rol bij het bekijken of de oplossing stabiel dan wel onstabiel is.

Neem $y_n(t)$ een kleine afwijking van de *steady-state* oplossing $x_n^0(t)$ d.w.z.:

$$x_n(t) = x_n^0(t) + y_n(t) \quad \text{met} \quad |y_n| \ll 1 \quad (4.14)$$

De bestuurder van de n^e auto zal als gevolg van deze verandering moeten afremmen of juist accelereren om ervoor te zorgen dat de kleine afwijking van de *steady-state* oplossing afneemt en uiteindelijk nul wordt. Hij moet echter niet te heftig corrigeren want daardoor kan de afwijking in absolute zin nog groter worden en dat willen we niet (instabiel). Dus als er geldt dat $\frac{d}{dt}|y_n(t)| < 0$ dan is er sprake van stabiliteit.

De **MHVD** vergelijking wordt gegeven door

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = c[V\left(\sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t)\right) - v_n(t)] + \sum_{j=1}^q \kappa_j \Delta v_{n+j-1}(t)$$

Vullen we hier vergelijking (4.13) in dan krijgen we:

$$\frac{d^2y_n(t)}{dt^2} = c[V\left(\sum_{l=1}^p \beta_l (\Delta y_{n+l-1}(t) + h)\right) - V(h) - \dot{y}_n(t)] + \sum_{j=1}^q \kappa_j \Delta \dot{y}_{n+j-1}(t) \quad (4.15)$$

Met $V(h)$ bedoelen we $V(h, h, \dots, h) = V(\sum_{l=1}^p \beta_l h)$. Nu is het zaak om de vergelijking te lineariseren naar Δx rond het punt $\Delta x = h$. Voor de optimale snelheid in de vergelijking hierboven geldt dan:

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{l=1}^p \beta_l (\Delta y_{n+l-1}(t) + h)\right) &= V\left(\sum_{l=1}^p \beta_l h\right) + \\ \Delta y_n \frac{\partial V}{\partial \Delta x_n} \Big|_{\Delta x_n=h} &+ \dots + \Delta y_{n+p-1} \frac{\partial V}{\partial \Delta x_{n+p-1}} \Big|_{\Delta x_{n+p-1}=h} \\ &= V(h) + \Delta y_n \frac{\partial V(\sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t))}{\partial \sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t)} \Big|_{\Delta x_n=h} + \frac{\partial \sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t)}{\partial \Delta x_n} + \\ &\dots + \Delta y_{n+p-1} \frac{\partial V(\sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t))}{\partial \sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t)} \Big|_{\Delta x_{n+p-1}=h} + \frac{\partial \sum_{l=1}^p \beta_l \Delta x_{n+l-1}(t)}{\partial \Delta x_{n+p-1}} \\ &= V(h) + V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l \Delta y_{n+l-1}(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Stoppen we dit gelineariseerde resultaat terug in vergelijking (4.15) dan hebben we vergelijking (4.15) gelineariseerd en dat ziet er als volgt uit:

$$\frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} = c[V'(h) \sum_{l=1}^p (\beta_l \Delta y_{n+l-1}(t)) - \dot{y}_n(t)] + \sum_{j=1}^q \kappa_j \Delta \dot{y}_{n+j-1}(t) \quad (4.17)$$

Nu is het zaak om de stabiliteit te onderzoeken. Dit doen we door $y_n(t)$ te ontwikkelen in zijn Fourier-mode $y_n = e^{i\theta n + i\omega t}$, met $\theta = \frac{2\pi\kappa}{N}$ ($\kappa = 0, 1, \dots, N-1$), en in te vullen in bovenstaande vergelijking. Dit geeft:

$$\omega^2 + c \left(V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l e^{(il\theta)} (1 - e^{(-i\theta)}) - i\omega \right) + i\omega \sum_{j=1}^q \kappa_j e^{(i\theta j)} (1 - e^{(-i\theta)}) = 0 \quad (4.18)$$

Merk op dat $y_n(t) = e^{i\theta n} e^{i\omega t}$ en dus voor stabiliteit moet $|e^{i\omega t}| \leq 1$ zijn voor alle t . We kunnen dan een aantal gevallen onderscheiden voor $\omega = a + bi$:

- $b = 0 \Rightarrow \omega$ is reëel. Dan is de Fourier-mode stabiel, want $|e^{i\omega t}| = 1$
- $b = m^2 > 0 \Rightarrow e^{i\omega t} = e^{iat} e^{-m^2 t}$ dan is de mode dus stabiel.
- $b = -m^2 < 0 \Rightarrow e^{i\omega t} = e^{iat} e^{m^2 t}$ dan is de mode dus instabiel.

We moeten dus onderzoeken voor welke waarden van de gevoeligheids parameter c we één van de bovenstaande situaties hebben. Dit doen we door eerst te stellen dat er een kritieke waarde $c_k(\theta)$ voor c is waarvoor geldt dat $\Im(\omega(\theta)) = b = 0$, deze waarde noemen we ω_k . Voor deze waarde van $\omega (= a + 0i = a) = \omega_k$ kunnen we vergelijking (4.18) opsplitsen in een reëel deel en een imaginair deel. Respectievelijk:

$$\omega_k^2 - \omega_k \sum_{j=1}^q \kappa_j [\sin(\theta j) - \sin(\theta(j-1))] + c_k(\theta) V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l [\cos(\theta l) - \cos(\theta(l-1))] = 0 \quad (4.19)$$

$$\omega_k c_k(\theta) - \omega_k \sum_{j=1}^q \kappa_j [\cos(\theta j) - \cos(\theta(j-1))] - c_k(\theta) V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l [\sin(\theta l) - \sin(\theta(l-1))] = 0 \quad (4.20)$$

Laat $\kappa_j = \frac{\lambda_j}{\tau} = \lambda_j c$, want $c = \frac{1}{\tau}$. Hieruit kunnen we een vergelijking afleiden voor zowel de ω_k als voor de kritieke waarde van c . Dus uit vergelijking (4.19) volgt:

$$c_k(\theta) = \omega_k^2 \left[\omega_k \sum_{j=1}^q \lambda_j [\sin(\theta j) - \sin(\theta(j-1))] - V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l [\cos(\theta l) - \cos(\theta(l-1))] \right]^{-1} \quad (4.21)$$

waarin h de constante *headway* is waarvoor de verkeersdoorstroming uniform is en ω gelijk is aan (volgt uit vergelijking (4.20)):

$$\omega_k = V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l [\sin(\theta l) - \sin(\theta(l-1))] \left(1 - \sum_{j=1}^q \lambda_j [\cos(\theta j) - \cos(\theta(j-1))] \right)^{-1} \quad (4.22)$$

Voor de parameters β_l kiezen we hetzelfde als staat in formule (4.10) en voor λ_j kiezen we hetzelfde als Xie et al. in bron [2]. Namelijk: $\lambda_j = \lambda_0 (\frac{1}{5})^j$ met $(j = 1, 2, \dots, q)$. λ_0 is een constante parameter. Met numerieke calculaties van vergelijking (4.21), met die hierboven genoemde λ_j en β_l , zien we dat $c_k(\theta)$ een maximale waarde heeft als $\theta \rightarrow 0$. Dit is ook intuïtief makkelijk te zien: de noemer in vergelijking (4.21) gaat immers naar 0 als $\theta \rightarrow 0$ gaat. Omdat het niet mogelijk is om voor θ nul in te vullen in $c_k(\theta)$, schrijven we de sin en cos termen in vergelijking (4.21) in hun reeks ontwikkeling rond 0. Als $\theta \rightarrow 0$ kunnen we uit deze reeksen de hogere orde termen weglaten en gedragen de sin en cos zich als hieronder:

$$\begin{aligned} \sin(\theta j) &\sim \theta j \\ \sin(\theta(j-1)) &\sim \theta(j-1) \\ \cos(\theta l) &\sim 1 - \frac{1}{2}\theta^2 l^2 \\ \cos(\theta(l-1)) &\sim 1 - \frac{1}{2}\theta^2 l^2 - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta^2 l \end{aligned}$$

Als we de benaderingen voor de sin en cos (rond $\theta = 0$) invullen in vergelijkingen (4.21) en (4.22) en de termen die niks meer “doen”, als $\theta \rightarrow 0$, eruit halen dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \omega_k(\theta) &= V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l \theta \\ c_k(\theta) &= \frac{(V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l \theta)^2}{(V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l \theta) \sum_{j=1}^q \lambda_j \theta - V'(h) \sum_{l=1}^p \beta_l (\theta^2 (\frac{1}{2} - l))} \\ &= \frac{2V'(h)}{\sum_{l=1}^p \beta_l (2l - 1) + 2 \sum_{j=1}^q \lambda_j} = c_k \end{aligned} \quad (4.23)$$

De laatste stap kan gemaakt worden omdat $\sum_{l=1}^p \beta_l = 1$. Nu weten we dus hoe de hoogste kritieke waarde voor c eruit ziet. Rest ons nog om te kijken wat er gebeurt met de stabiliteit als we iets boven deze waarden gaan zitten ($c > c_k$) of iets eronder ($c < c_k$).

Als $c = c_k$ dan is $\omega = \omega_k = a$ en is dus reëel \Rightarrow Fourier-mode is stabiel. Nu verstoren we c een heel klein beetje, deze wordt $c = c_k + \delta c$ en dus wordt $\omega = \omega_k + \delta \omega$. Vullen we dit in, in vergelijking (4.18) en halen we de termen $\delta \omega^2$, δc^2 en $\delta \omega \delta c$ eruit dan kunnen we voor $\delta \omega$ het volgende schrijven:

$$\delta \omega = \frac{-\omega_k^2 - (c_k + \delta c)(V'(h) \sum_l \beta_l e^{i\theta l}(1 - e^{-i\theta}) - i\omega_k) - i\omega_k(c_k + \delta c) \sum_j \lambda_j e^{i\theta j}(1 - e^{-i\theta})}{2\omega_k - c_k i + i c_k \sum_j \lambda_j e^{i\theta j}(1 - e^{-i\theta})}$$

Hier kunnen we vergelijking (4.18) uithalen (die gelijk is aan 0) en voor θ nul invullen, dit kunnen we doen omdat we willen kijken naar een c die groter is dan alle $c_k(\theta)$ en dus moet

deze ook groter zijn dan de grootste voor $\theta = 0$. We willen nu naar het imaginaire deel van $\delta\omega$ kijken. Dit is immers ook het imaginaire deel van ω en zegt dus wat over de stabiliteit van de Fourier-mode. We krijgen:

$$\Im(\delta\omega) = \Im\left(i \frac{2\omega^2 \delta c}{4\omega_k^2 + c_k^2}\right) \quad (4.24)$$

Omdat geldt dat $\Im(\omega) = \Im(\omega_k + \delta\omega) = \Im(\delta\omega)$ kunnen we hieruit het volgende opmaken:

$$\Im(\omega) = \begin{cases} \text{positief} & \text{als } \delta c > 0 \\ \text{negatief} & \text{als } \delta c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > c_k \Rightarrow \Im(\omega) > 0 \\ c < c_k \Rightarrow \Im(\omega) < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

We kunnen dus concluderen (lees ook de stabiliteits analyse onder vergelijking (4.18)) dat de uniforme doorstroming stabiel is, voor kleine verstoringen met lange golflengten, als:

$$c > \frac{2V'(h)}{\sum_{l=1}^p \beta_l(2l-1) + 2 \sum_{j=1}^q \lambda_j} \quad (4.26)$$

Als c gelijk is aan de hierboven staande waarde dan zitten we op het randje van stabiel en instabiel. De lijn die hierbij hoort, zie ook vergelijking (4.23), noemen we de neutrale stabiliteitskromme.

4.5 Gevolgen stabiliteitsanalyse

Met deze neutrale stabiliteitskromme kunnen we dus zien wat het effect op de stabiliteit van de uniforme doorstroming is door meerdere *headways* en snelheidsverschillen mee te nemen in ons model. Maar eerst wil ik uitleggen wat deze stabiliteitsconditie precies inhoudt en hoe je dit terug ziet in het echte verkeer. Daarna en aan de hand van het gecreeërde bergrip van deze stabiliteitscondities kunnen we zien of *ITS* systeem inderdaad zorgt voor een betere doorstroming.

Daarvoor moeten we eerst kijken naar de stabiliteitsconditie waarbij er maar naar één afstandsverschil wordt gekeken (d.w.z. $p = 1$) en niet naar snelheidsverschillen (dus: $\lambda_j = 0$, ($j = 1, 2, \dots, q$)). De stabiliteitsconditie voor zo'n model wordt dus gegeven door:

$$c > 2V'(h) \quad \text{oftewel} \quad V'(h) < \frac{c}{2} \quad (4.27)$$

De h is hierin weer de *headway* die hoort bij een uniforme stroming, dus alle *headways* zijn gelijk aan h . We kunnen nu een situatie beschouwen waarin we een circuit hebben van lengte L met daarop N auto's. Hierin heeft de eerste auto de tweede auto als voorganger, de tweede de derde (enz.) en de laatste auto, de N^e auto, heeft de eerste auto als directe voorganger en $h = \frac{L}{N}$. Dus $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow N \leftrightarrow 1 \leftrightarrow \dots$. Zonder enig verlies van algemeenheid kunnen we bijvoorbeeld nemen dat $c = 1$. Als we nu de veilige afstand h_c vastzetten op 2 en als $v_{max} = 2$ dan wordt onze stabiliteitsconditie:

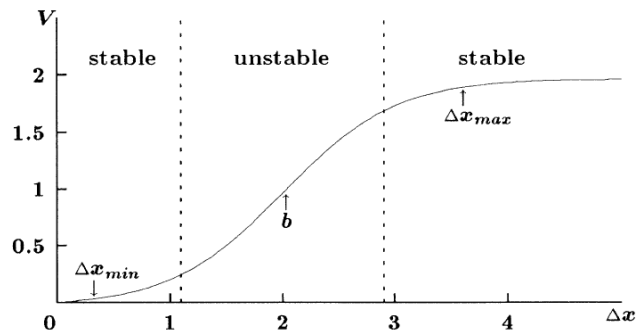
$$V'(h) = \frac{1}{\cosh(h-2)^2} < \frac{1}{2}$$

De gelijkheid heeft vier oplossingen voor h waarvan twee reëel en twee imaginair. De twee reële oplossingen zijn $h_1 = 1.11863$ en $h_2 = 2.88137$ (de complexe oplossingen laten we buiten beschouwing omdat het hier om afstanden gaat). De uniforme stroming is nu dus stabiel voor $h \in \langle 0, h_1 \rangle \cup \langle h_2, \infty \rangle$ waarin de h dus afhangt van de hoeveelheid auto's en de lengte van de weg. Dit houdt in dat een uniforme stroming stabiel is als er opstoppingen in de stroming voorkomen, namelijk in het geval dat $h \in \langle 0, h_1 \rangle$, of als er in de uniforme stroming al lekker doorgereden (lage concentratie auto's) kan worden dus als $h \in \langle h_2, \infty \rangle$. Precies in het midden van het instabiele gebied voor h ligt h_c . Hetgeen logisch is omdat zich bij h_c het buigpunt bevindt van de optimale snelheid $V(\cdot)$ en dus de afgeleide de grootste waarde heeft.

Stel dat er N auto's zijn op een circuit met een lengte L en we de *steady state* oplossing in het begin op bijvoorbeeld de volgende manier verstoren:

$$\begin{aligned} x_1^0(0) &= x_1^0 + 0.1 \\ x_n^0(0) &= x_n^0 \text{ voor } n \neq 1 \\ \dot{x}_n^0(0) &= 0 \end{aligned}$$

Deze kleine verstoring van de *steady state* voor deze ene auto heeft geen drastische gevolgen als h zich in het één van de twee stabiele gebieden bevindt. Wat er dan gebeurt is dat de verstoring wordt “glad gestreken” zodat alle *headways* weer gelijk worden aan h en er dus weer een uniforme stroming is op het circuit (dus de *steady state*).



Figuur 4.2: De grafiek van de optimale snelheidsfunctie $V(\Delta x)$ voor één *headway* en met $v_{max} = 2$, $h_c = 2$. $b (= \frac{L}{N})$ is de gelijkmatig verdeelde ruimte tussen de auto's op tijdstip $t = 0$ (b willen we graag in de buurt van of zelfs gelijk aan h_c hebben). Ook staan aangegeven de *headway* Δx_{min} waar de concentratie auto's groot is en de *headway* Δx_{max} die hoort bij lage concentraties in een stroming met opstoppingen.

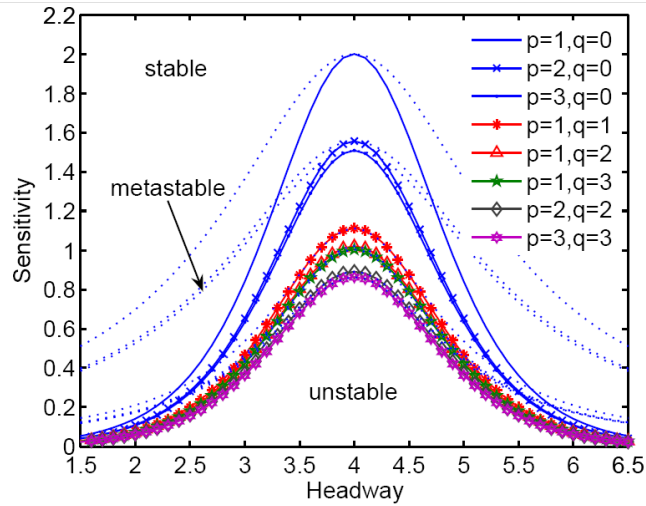
Stel nou dat de in het begin evenredig verspreide afstand h niet in het stabiele gebied ligt, dit is wat we graag willen omdat we de uniforme *headways* ongeveer gelijk willen hebben aan

de veilige *headway* h_c , zodat iedereen op dezelfde veilige afstand kan doorrijden. Dit betekent dat bij een kleine verstoring van deze uniforme stroming, zoals hierboven, het onderlinge afstandsverschil tussen sommige auto's Δx naar Δx_{min} toegaat (deze Δx bevindt zich in het stabiele gebied) en in een opstopping resulteert. Dit houdt voor de overige auto's in dat de *headways*, Δx , naar een zekere Δx_{max} toe gaan. Want we moeten nog steeds over een weg (circuit) van lengte L de N auto's verdelen. Nemen sommige auto's een kleiner deel van het circuit in beslag dan nemen de andere automatisch een groter deel van de weg in.

Met de h_c geven we dus als het ware ook de scheiding aan tussen de opstoppings regio, waar $h < h_c$, en de regio met kleine concentraties van auto's, met $h > h_c$, aan. Als je naar het verkeer kijkt dan zullen *headways* nooit altijd in de buurt blijven van de h_c (als we aannemen dat h voldoende dichtbij h_c ligt). Dit omdat er rijdende met *headways* van om de nabij de h_c er maar even wat hoeft te gebeuren en het verkeer gaat langzamer rijden omdat in die regio's de Δx 'en kleiner worden. En op de andere stukken van het circuit met lengte L kan het verkeer lekker doorrijden omdat het hier rustiger wordt. Dit is dus ook in het echt de "stabiele" situatie. Maar we zien ook dat als we onze c groot maken, wat inhoudt dat de bestuurders goed en snel reageren op de snelheids- en afstandsverschillen, dat dan voor een zekere c de verstoorde *steady state* altijd weer terug zal gaan naar de *steady state* (x_n^0) met alle $\Delta x = h = \frac{L}{N}$. Aan het "ophogen" van de gevoeligheidsfactor $c = \frac{1}{\tau}$ zit echter een menselijke en mechanische limiet. Een mens heeft een bepaalde reactietijd en ook de auto heeft tijd nodig om de snelheid naar de gewenste snelheid aan te passen. Dus hierin ligt ook niet de oplossing. Omdat we toch graag willen dat we met een veilige afstand h_c (i.e. zonder files) achter elkaar aanrijden en de h zich dus in het onstabiele gebied bevindt (rond h_c) gaan we proberen om deze klokkrommen (zie figuur 4.3), de neutrale stabiliteitskrommen, lager te krijgen door met het *ITS* naar meerdere auto's voor ons te kijken naar zowel het afstandsverschil als het snelheidsverschil. Vergelijk de stabiliteitscondities (4.26) en (4.27) maar eens met elkaar. Doordat de klokkrommen zakken hoeven de bestuurders minder snel en dus ook minder gevoelig te reageren, want $c = \frac{1}{\tau}$ waarin τ de tijd is die een bestuurder heeft om de auto op de optimale snelheid te brengen. Lukt de bestuurder dit in de tijd τ dan is de stroming stabiel. Is deze tijd echter te kort, dus $c = \frac{1}{\tau}$ te gevoelig, dan resulteert dit in een instabiele *steady state* en zullen we dus opstoppingen en lage concentratie verkeer krijgen. En dan zitten we dus in een situatie waar we ons niet in willen bevinden, we willen geen files maar die situatie is nog steeds stabiel dan als Δx rond de h_c zit en al het verkeer dus zo goed mogelijk doorrijdt. Het filerijden is stabiel omdat er met filerijden geen snelle reactietijd τ vereist is om op het overige verkeer te reageren en dit geldt ook voor verkeer in lage concentraties. Natuurlijk is het hier nog steeds zo dat als je te traag reageert (τ te groot en c te klein) ook deze opstopping/vrije stroom toestand instabiel wordt. Dit is te zien in het diagram 4.3.

4.6 Analyse van de neutrale stabiliteitskrommen in de figuur

De krommen in het plaatje zijn gemaakt door neutrale stabiliteitskrommen (*NSK*) te plotten voor verschillende waarden van p en q , wat aangeeft hoeveel, respectievelijk, *headways* en snelheidsverschillen we in beschouwing nemen. We plotten de *NSK* met de volgende waarden voor de parameters: $v_{max} = 2$, $h_c = 4$ en $\lambda_0 = 2$. Voeren we dit in dan wordt vergelijking (4.26):



Figuur 4.3: *headway*-gevoeligheidsfactor diagram voor verschillende waarden van p en q . De vaste lijnen zijn de neutrale stabiliteitskrommen die worden gegeven door vergelijking (4.26). Boven deze NSK bevindt zich het stabiele gebied en onder deze krommen ligt het instabiele gebied. Op de horizontale as staat de uniforme *headway* h en op de verticale as de gevoeligheidsfactor c . Vergelijking (4.26) is in deze figuur geplot voor de in de figuur vermelde waarden van p en q . De parameters van (4.26) zijn vastgezet op $v_{max} = 2$, $h_c = 4$ en $\lambda_0 = 2$.

$$f(h) = \frac{2 \frac{1}{\cosh(h-4)^2}}{\sum_{l=1}^p \beta_l (2l-1) + 4 \sum_{j=1}^q \left(\frac{1}{5}\right)^j} < c \quad (4.28)$$

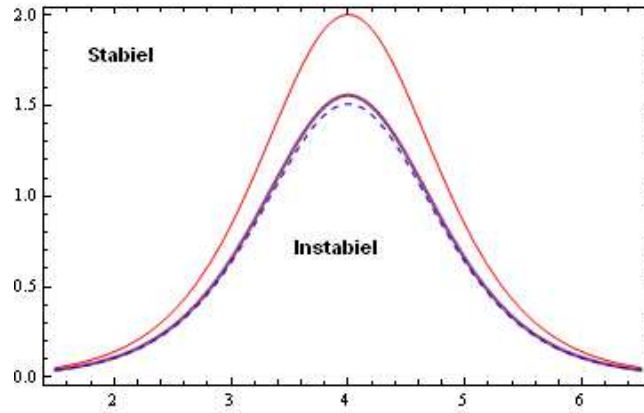
Vergelijken we dit weer met de NSK, $g(h) = \frac{2}{\cosh(h-4)^2}$, die we hierboven uitvoerig hebben geanalyseerd van het simpele systeem $\frac{d^2 x_n}{dt^2} = c(V(\Delta x_n) - \dot{x}_n)$. Dan zien we dat het **MHVD** waar het ITS gebruik van maakt, stabielier is dan het simpele model als geldt dat:

$$\sum_{l=1}^p \beta_l (2l-1) + 4 \sum_{j=1}^q \left(\frac{1}{5}\right)^j > 1 \quad (4.29)$$

Want dan geldt inderdaad dat $f(h) < g(h)$ en ons **MHVD** stabielier is dan als we alleen naar de *headway* met de auto voor ons kijken. Analyse van de twee sommen levert ons inderdaad op dat dit altijd groter zal zijn dan 1. $\sum_{l=1}^p \beta_l (2l-1)$ is voor $p = 1$ gelijk aan 1 en zal uiteindelijk als $p \rightarrow \infty$ naar $1\frac{1}{3}$ convergeren. $4 \sum_{j=1}^q \left(\frac{1}{5}\right)^j$ is voor $q = 1$ gelijk aan $\frac{4}{5}$ en de som convergeert uiteindelijk naar 1. Dus het heeft wel degelijk zin om de extra ITS informatie in ons model mee te nemen, dit maakt het systeem stabielier dan als we in dezelfde omstandigheden naar een model kijken dat alleen de *headway* met de voorganger beschouwt.

Wat we ook zien is dat als we alleen maar naar één snelheidsverschil (het verschil in snelheid met de auto voor ons) kijken en niet naar *headways* dat dan de stabiliteit afneemt t.o.v. het *OV* model. Het is dus essentieel om sowieso naar een *headway* te kijken.

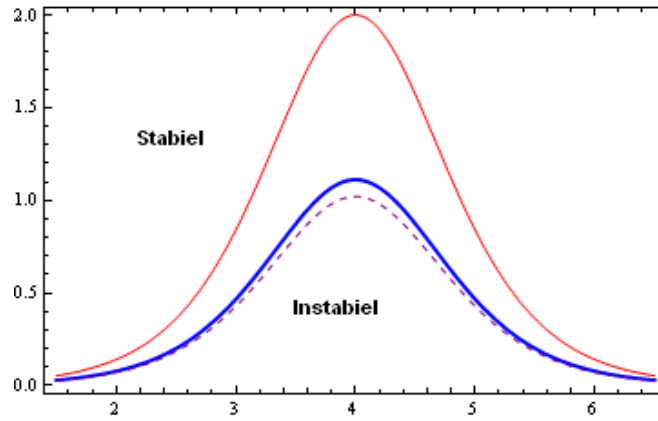
Het diagram maakt ons duidelijk hoeveel stabiel(er) de uniforme stroming wordt door naar een auto meer of minder te kijken. Kijken we eerst naar één auto, $s = 1$, en beschouwen we alleen de *headway* met deze auto, dus $(p, q) = (1, 0)$. Dit resulteert in de bovenste vaste lijn in het diagram. Dit is de *NSK*: $g(h)$ van het simpele *OV* model. Nu kunnen we kijken naar meer *headways* en laten we de snelheidsverschillen voor wat ze zijn. Dus bij twee voorgaande auto's, $s = 2$, kijken we naar $(p, q) = (2, 0)$ en bij $s = 3$ naar $(p, q) = (3, 0)$. Het beschouwen van niet één maar twee *headways* heeft een gunstig effect op de *NSK*, die daalt. Een derde *headway* er extra bij nemen verlaagt de *NSK* wel maar heeft beduidend minder effect op de stabiliteit (zie figuur 4.4).



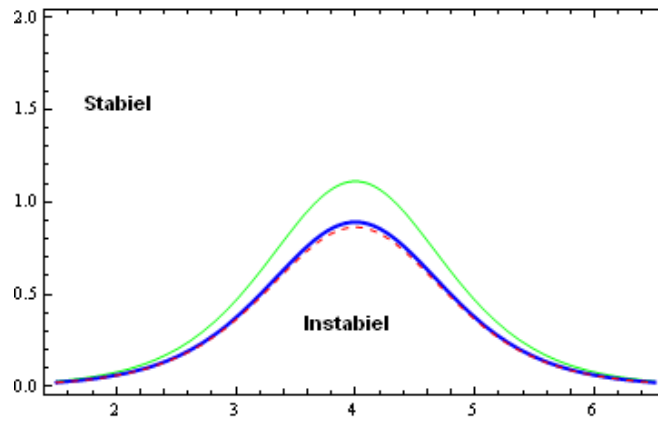
Figuur 4.4: In deze figuur zijn de *NSK* geplot voor een oplopend aantal *headways*, p . Er wordt niet naar snelheidsverschillen tussen auto's gekeken, dus $q = 0$. De rode kromme is de *NSK* met $(p, q) = (1, 0)$. De paarse met $(p, q) = (2, 0)$. De blauwe met $(p, q) = (3, 0)$. ($v_{max} = 2$, $h_c = 4$ en $\lambda_0 = 2$).

Kijken we nu bij $s = 1$ naar zowel de *headway* als naar het snelheidsverschil met de auto voor ons, $(p, q) = (1, 1)$ dan zakt de *NSK* wel weer aanzienlijk. Verhogen we de q en beschouwen we dus de *NSK*'s van $(p, q) = (1, 2)$ bij $s = 2$ en $(p, q) = (1, 3)$ bij $s = 3$ dan zakt de *NSK* maar heel iets onder die van $(p, q) = (1, 1)$ (zie figuur 4.5).

Dit in tegenstelling tot die van $(p, q) = (2, 2)$ bij $s = 2$ die wel weer een stuk onder die van $(p, q) = (1, 1)$ ligt (zie figuur 4.6). Uiteindelijk heeft het niet veel zin meer om meer en meer auto's voor de n^e in beschouwing te nemen omdat het rijgedrag van een auto zo ver voor ons heel weinig effect heeft. Dit zien we terug in de convergerende sommen van de gewichtsfactoren die in de vergelijking voor de *NSK* $f(h)$ staan.



Figuur 4.5: Hier zijn de NSK geplot voor een oplopend aantal snelheidsverschillen tussen twee opeenvolgende auto's, q . Er wordt alleen naar de *headway* Δx_n gekeken, dus $p = 1$. Rood: $(p, q) = (1, 0)$. Blauw: $(p, q) = (1, 1)$. Paars: $(p, q) = (1, 2)$. ($v_{max} = 2$, $h_c = 4$ en $\lambda_0 = 2$).



Figuur 4.6: Hier zijn de NSK geplot met $p = q$, er wordt dus naar evenveel snelheidsverschillen gekeken als naar *headways*. Groen: $(p, q) = (1, 1)$. Blauw: $(p, q) = (2, 2)$. Rood: $(p, q) = (3, 3)$. ($v_{max} = 2$, $h_c = 4$ en $\lambda_0 = 2$).

Hoofdstuk 5

Conclusies

Eerst hebben we aan de hand van de drie grootheden: snelheid, dichtheid en doorstroming een continu model opgesteld. Het snelheidsveld in dit model speelt een belangrijke rol. Vervolgens is het mogelijk om een mooie relatie op te stellen voor de doorstroming, dichtheid en het snelheidsveld. Het afleiden van een behoudswet voor het aantal auto's is de volgende stap. Hierin wordt aangenomen dat tussen twee punten geen auto's verdwijnen of ineens verschijnen. De behoudswet kunnen we schrijven in de integraal vorm maar in de vorm van een p.d.v. (vergelijking (3.7)) hebben we er meer aan. Om wat met deze p.d.v. te kunnen is het van belang om goed naar het snelheidsveld te kijken. Daardoor kunnen we de p.d.v. voor zowel bijna uniforme als niet uniforme verkeersdichtheden oplossen om zo de verkeersdichtheid op latere tijdstippen te bepalen. Dit gebeurt met karakteristieken. Op deze karakteristieken blijft de dichtheid gelijk. Een probleem met dit continue model is dat karakteristieken elkaar kunnen snijden. Dit gebeurt in het geval als verkeer met een lage dichtheid inloopt op verkeer met een hogere dichtheid. Daardoor krijgen we op één plek (en tijd) meerdere dichtheden. Het is duidelijk dat dit niet mogelijk is en we moeten dus naar een model gaan kijken dat deze situatie van file vorming beter kan beschrijven.

Een discreet model beschouwt elke auto apart en legt een verband tussen de acceleratie van een auto en het afstandsverschil (of een snelheidsverschil) van die auto met zijn voorganger. Met zo'n discreet model is het in het uniforme geval goed mogelijk om het snelheidsveld te bepalen en dus ook om de verkeersdoorstroming uit te rekenen. Het *optimal velocity* model laat het acceleratie/rem gedrag van een auto afhangen van een optimale snelheid V , die afhangt van de *headway*, en de huidige snelheid van de auto (zie vergelijking (4.6)). Het *multiple velocity difference* model is een uitbreiding van het *OV* model door meerdere *headways* en snelheidsverschillen mee te nemen (vergelijking (4.9)). Met een lineaire stabiliteits analyse van de uniforme doorstroming wordt het duidelijk wanneer de verkeerssituatie stabiel is. We willen een uniforme doorstroming met *headways* dicht in de buurt van de veilige *headway* zo stabiel mogelijk maken. Op deze manier kunnen alle auto's veilig en goed doorrijden. Het *intelligent transportation system* kan de *headways* en de snelheidsverschillen van de voorgaande auto's bepalen en deze informatie aanbieden aan de bestuurder. We kunnen concluderen dat we beter beide types van *ITS* informatie kunnen beschouwen dan dat we maar naar één type kijken als we evenveel voorgaande auto's erbij betrekken. De combinatie van beide types heeft het gunstigste effect op de uniforme verkeersstabiliteit. Ook is te zien in zowel het diagram (figuur 4.3) als in $f(h)$ dat het beschouwen van *headways* een groter gunstiger effect heeft op de stabiliteit dan als we alleen naar snelheidsverschillen kijken. Alleen maar

naar snelheidsverschillen kijken tussen de voorgaande auto's heeft zelfs een ongunstig effect op de stabiliteit. Het is dus essentieel dat we sowieso naar één *headway* kijken. Stel dat het *ITS* naar s voorgaande auto's kijkt dan is het meest gunstigste voor de stabiliteit om dan $(p, q) = (s, s)$ te nemen als we dat toch allemaal meten.

Zo'n *ITS* heeft dus duidelijk de toekomst. Als wegen nog drukker worden kan het *ITS* de observerende taken van de mens overnemen om zo een betere doorstroming te garanderen.

Bibliografie

- [1] Haberman, Richard, *Mathematical Models: Traffic Flow*, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1977.
- [2] D.F. Xie, Z.Y. Gao and X.M. Zhao, *Stabilization of Traffic Flow Based on the Multiple Information of Preceding Cars*, Communications in computational physics, vol. 3 (2008), No. 4, pp. 899 – 912.
- [3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation*, Phys. Rev. E, 51 (1995), 1035.
- [4] H. Lenz, C.K. Wagner and R. Sollacher, *Multi-anticipative car-following model*, Eur. Phys. J. B, 7 (1999), 331.
- [5] H.X. Ge, S.Q. Dai, L.Y. Dong and Y. Xue, *Stabilization effect of traffic flow in an extended car-following model based on an intelligent transportation system application*, Phys. Rev. E, 70 (2004), 066134.
- [6] Z.P. Li and Y.C. Liu, *Analysis of stability and density waves of traffic flow model in an ITS environment*, Eur. Phys. J.B, 53 (2006), 367 – 374.
- [7] H. Ez-Zahraouy, Z. Benrihane, A. Benyoussef, *The Optimal Velocity Traffic Flow Models With Open Boundary*, M.J. Condensed Matter, vol. 5 (2004), number 2.
- [8] Moet, Esther, *Simulatie van fileverschijnselen*, NAW $\frac{5}{4}$, nr. 2 (2003).
- [9] Rothery, Richard W., *Car following models*, <http://www.myoops.org/cocw/mit/NR/rdonlyres/Civil-and-Environmental-Engineering/1-225JFall2002/C8DCAE43-FEE6-4DFD-8F81-6D7F47E72135/0/carfollowinga.pdf>

Bovenstaande websites zijn bezocht op 10 – 06 – 2008.